НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ К ТЕМЕ: «СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН»

Паниотов Ю. Н., Перетолчина Г. Б.
Донецкий национальный технический университет

При изложении темы « Системы случайных величин» в качестве примеров можно рассмотреть вывод выражений для плотностей некоторых случайных величин (СВ) , имеющих важное значение в математической статистике и некоторых приложениях теории вероятностей, а также проиллюстрировать тенденцию к нормальному распределению суммы равномерно распределенных СВ.

Пусть СВ $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы и нормально распределены с параметрами $a = 0, \sigma = 1$. Так как плотность распределения системы независимых СВ равна произведению плотностей отдельных СВ, входящих в систему, то плотность распределения системы имеет вид:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2) \qquad (1)$$

и называется ***сферическим нормальным распределением*** [1].

Рассмотрим СВ χ_n^2, равную:

$$\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2 \quad . \qquad (2)$$

Найдем плотность СВ χ_n. Вероятность события, состоящего в попадании χ_n в сферический слой, заключенный между сферами радиусов r и $r + \Delta r$, найдем интегрированием по этому слою плотности (1). Поделив ее на Δr, получим

$$f_{\chi_n}(r) = C_n r^{n-1} \exp(-\frac{r^2}{2}) \qquad (3)$$

Константу C_n найдем из условия нормировки:

$$\int_0^\infty f_{\chi_n}(r)dr = C_n \int_0^\infty r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2}} dr = 1 \qquad (4)$$

Заменой $r^2 = 2t$, интеграл сводится к « гамма – функции », определяемой несобственным интегралом [2] :

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \qquad (5)$$

Окончательно получим:

$$f_{\chi_n}(r)=\frac{r^{n-1}\exp(-\frac{r^2}{2})}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2})} \qquad (6)$$

Изучая функции СВ , мы показали, что плотность распределения СВ $Y=X^2$ при известной плотности $f_X(x)$ распределения СВ X ($x>0$), определяется по формуле:

$$f_Y(y)=\frac{f_{X(\sqrt{y})}}{2\sqrt{y}}. \qquad (7)$$

Используя (7), находим плотность ***«χ^2- распределения» с*** n ***степенями свободы:***

$$f_{\chi_n^2}(x)=\frac{x^{\frac{n}{2}-1}\exp(-\frac{x}{2})}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})};x\geq 0. \qquad (8)$$

Пусть СВ $X_0,X_1,X_2,...,X_n$ независимы и нормально распределены с параметрами $a=0,\sigma=1$. Рассмотрим СВ T_n, называемую отношением Стьюдента:

$$T_n=\frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n X_k^2}}=\frac{X_0\sqrt{n}}{\chi_n}. \qquad (9)$$

Числитель представляет собой нормально распределенную СВ с параметрами $a=0,\sigma=\sqrt{n}$, плотность которой имеет вид:

$$f_0(x)=\frac{\exp(-\frac{x^2}{2n})}{\sqrt{2\pi n}}. \qquad (10\ )$$

Знаменатель распределен по закону (6). Функция распределения $S_n(t)$ для T_n определяется интегралом по области D, состоящей из четвертой координатной четверти и части первой, лежащей ниже прямой $x = rt$ в системе координат ROX (Рис.1):

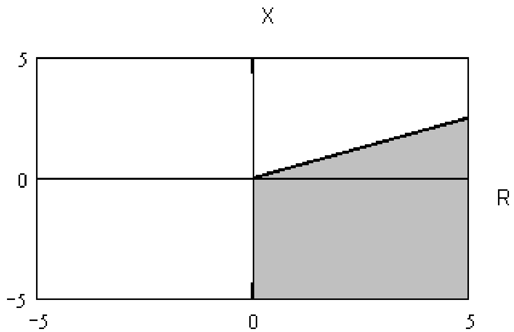

Рис.1

$$S_n(t)=P(T_n\le t)=\iint\limits_D f_0(x)f_{\chi_n}(r)dxdr=\int_0^{\infty} f_{\chi_n}(r)\left(\int_{-\infty}^{rt} f_0(x)dx\right)dr \qquad (\ 11)$$

Дифференцируя $S_n(t)$ с использованием теоремы Барроу, для плотности ***распределения Стьюдента с*** n ***степенями свободы***, получим:

$$s_n(t)=\int_0^{\infty} f_{\chi_n}(r)f_0(rt)rdr = A\int_0^{\infty} r^n \exp\left(-\frac{r^2}{2}\left(\frac{t^2}{n}+1\right)\right)dr \qquad (12\ )$$

где

$$A = 1\Bigg/\left(\sqrt{2\pi n}\,2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right) \qquad (\ 13)$$

Заменой $r^2(t^2+n)/2n = z$, интеграл приводится к виду:

$$s_n(t) = A \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{t^2}{n} + 1 \right)^{-\frac{n+1}{2}} \int_0^{\infty} z^{\frac{n-1}{2}} \exp(-z) dz \qquad (14)$$

Используя теперь формулу (5) , окончательно получим:

$$s_n(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n \cdot \pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{t^2}{n} + 1 \right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad (15)$$

Отметим следующие свойства $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad (16)$$

Если x - натуральное, то $\Gamma(n+1) = n!$. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Рассмотрим две независимые СВ X и Y с плотностями $f_X(x)$ и $f_Y(y)$. Найдем плотность распределения суммы $Z = X + Y$ этих СВ. Функция распределения Z :

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = \iint\limits_{x+y \le z} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y) dy \right) dx \,. \qquad (17)$$

Или

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) F_Y(z-x) dx \,. \qquad (18)$$

где $F_Y(y)$ - функция распределения Y .

Отсюда

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \qquad (19)$$

Пусть СВ X распределена равномерно на отрезке $[-1,1]$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1,1] \\ 0, & x \notin [-1,1] \end{cases} \qquad (20)$$

Из (19) следует

$$f_Z(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_Y(z-x)dx = \frac{1}{2}\int_{z-1}^{z+1} f_Y(y)dy = \frac{1}{2}\left(F_Y(z+1) - F_Y(z-1)\right) \quad (21)$$

Пусть Y распределена также, как X. Ее функция распределения будет иметь вид:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & при \quad y < -1 \\ \frac{1}{2}(y+1), & при \quad -1 \le y \le 1 \\ 1, & при \quad y > 1 \end{cases} \quad (22)$$

Отсюда с использованием (21) получим:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & при \quad z < -2 \\ \frac{1}{4}(z+2) & при \quad -2 \le z < 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z & при \quad 0 \le z \le 2 \\ 0 & при \quad z > 2 \end{cases} \quad (23)$$

Пусть теперь СВ Y представляет собой сумму двух равномерно распределенных на отрезке $[-1,1]$ величин. Ее плотность дается формулой (23), если заменить в ней z на y. Функция распределения Y :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & при \quad y < -2 \\ \frac{1}{8}(y+2)^2 & при \quad -2 \le y < 0 \\ \frac{4+4y-y^2}{8} & при \quad 0 \le y \le 2 \\ 1 & при \quad y > 2 \end{cases} \quad (24)$$

Используя еще раз формулу (21), можно получить плотность суммы трех СВ , распределенных равномерно на отрезке $[-1,1]$:

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & при \quad z<-3 \quad и \quad z>3\\ \dfrac{(z+3)^2}{16} & при \quad -3\le z<-1\\ \dfrac{3-z^2}{8} & при \quad -1\le z<1\\ \dfrac{(z-3)^2}{16} & при \quad 1\le z\le 3\end{cases} \tag{25}$$

На Рис.2 номерами 1,2 и 3 обозначены графики плотностей одной равномерно распределенной на отрезке $[-1,1]$ СВ (20), суммы двух (23) и трех (25) таких же СВ, соответственно.

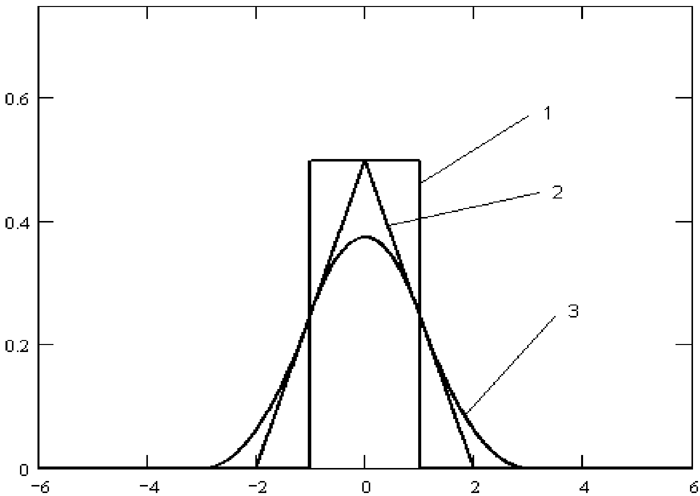

Рис.2.

Тенденция распределения суммы равномерно распределенных на отрезке $[-1,1]$ величин к нормальному хорошо прослеживается.

Литература

1. Гмурман В. Е., Теория вероятностей и математическая статистика, М., «Высшая школа», 1972, 368с.

2. Анго А., Математика для электро- и радиоинженеров, М., «Наука», 1967 ,780с.