УДК 51 (071)

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ НА СУММУ ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

Мироненко Л. П., Бабенко А. И.

Донецкий национальный технический университет

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів доведена теорема єдиності розкладу правильного раціонального дробу на суму найпростійших дробів. Доведення зроблено за допомогою визначника лінійної неоднорідної системи рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів. Розглянуто всі випадки коренів – дійсні та комплексні, прості та кратні. Всі можливі випадки відображаються у структурі головного визначника.

Как известно, для интегрирования произвольных рациональных дробей используется теорема о разложении рациональных дробей на сумму простейших [1-3]. Как правило, доказательство теоремы не представляет самостоятельного интереса и часто опускается в учебном процессе. При этом, для нахождения коэффициентов разложения используется непосредственно метод неопределенных коэффициентов. В связи с этим возникает идея связать теорему разложения и метод неопределенных коэффициентов, а именно, провести доказательство теоремы о разложении, используя метод неопределенных коэффициентов.

Согласно теореме, всякая правильная рациональная дробь может быть представлена единственным образом в виде суммы простейших дробей с некоторыми (неопределенными) коэффициентами. Другими словами, если $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ правильная рациональная дробь и $Q(x)$ имеет вид

$$Q(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-x_i)^{\alpha_i}.\prod_{j=1}^{s}(x^2+p_jx+q_j)^{\beta_j},\quad \sum_{i=1}^{r}\alpha_i+2\sum_{j=1}^{s}\beta_j=n,$$

$$\frac{p_j{}^2}{4}-q_j<0. \tag{1}$$

то имеет место единственное разложение дроби на сумму простейших дробей вида 1, 2, а именно,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{A_i^{(k)}}{(x-a_i)^k} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{\beta_j} \frac{M_j^{(k)} x + N_j^{(k)}}{(x^2 + p_j x + q_j)^k}.$$

Коэффициенты A, M, N - неизвестные действительные числа (их называют неопределенными коэффициентами, подлежат нахождению), α_i кратность действительного корня a_i, β_i - комплексного корня b_i многочлена $Q(x)$.

<u>Доказательство</u> теоремы основано на методе неопределенных коэффициентов, который продемонстрируем сначала для квадратного трехчлена $Q(x)$ с различными действительными корнями a_1 и a_2.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha x + \beta}{(x-a_1)(x-a_2)} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2}. \qquad (2)$$

В правой части равенства приводим к общему знаменателю и, согласно методу, составим систему линейных уравнений, приравнивая коэффициенты при x и свободном члене:

$$\begin{cases} A + B = \alpha; \\ a_1 A + a_2 B = \beta. \end{cases}$$

Разложение (2) является единственным, если определитель системы отличен от нуля, что видно непосредственно из (3).

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 \neq 0. \qquad (3)$$

Рассмотренный случай легко проверяется, когда знаменатель рациональной дроби имеет три различных действительных корня $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -(a_2+a_3) & -(a_1+a_3) & -(a_1+a_2) \\ a_2a_3 & a_1a_3 & a_1a_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(a_2+a_3) & a_2-a_1 & a_3-a_1 \\ a_2a_3 & -(a_2-a_1)a_3 & -(a_3-a_1)a_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a_3 & -a_2 \end{vmatrix} (a_2-a_1)(a_3-a_1) = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)$$

Уже, на этом этапе доказательства теоремы, ясно обобщение на случай n различных действительных корней

$$\Delta_n = \prod_{i>j}^{n} (a_i - a_j). \tag{4}$$

Этот определитель хорошо известен в математике и называется определителем Вандермонда [4]. Количество множителей в (4) равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Заканчивая рассматривать случай различных действительных корней, обратим внимание на методику вычисления определителя Δ_3, которая сохраняется для любого порядка Δ_n.

Теперь рассмотрим случай n кратного действительного корня

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)^n} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a_1)^n}. \tag{5}$$

Приводя правую часть равенства к общему знаменателю, легко записать определитель системы уравнений для коэффициентов A_i. Практически из равенства (5) видно, что определитель системы имеет треугольный вид с диагональными элементами, равными единице, поэтому определитель системы равен единице и не зависит от кратности корня n.

Рассмотрим случай различных кратных действительных корней на примере разложения

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma.}{(x-a_1)(x-a_2)^2}=\frac{A}{x-a_1}+\frac{B}{x-a_2}+\frac{C}{(x-a_2)^2}. \qquad (6)$$

В правой части равенства приводим к общему знаменателю и, согласно методу, составим систему линейных уравнений, приравнивая коэффициенты при степенях $x^2, x\,x$ и свободном члене:

$$\begin{cases} A+B=\alpha \\ -2a_2A-(a_1+a_2)B+C=\beta \\ a_2^2A+a_1a_2B-a_1C=\gamma \end{cases}$$

Определитель системы равен

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2a_2 & -(a_1+a_2) & 1 \\ a_2^2 & a_1a_2 & -a_1 \end{vmatrix}=(a_2-a_1)^2.$$

Нетрудно сделать заключение, что в случае кратных действительных корней в определителе Вандермонда (4) соответствующая разность корней $(a_i-a_j).$ запишется в степени, равной кратности корня. Обобщим запись (4) в случае кратных действительных корней

$$\Delta_n=\prod_{i>j}(a_i-a_j)^{\alpha_i\alpha_j}, \qquad (7)$$

где α_i и α_j - кратности корней a_i и a_j, $\sum_i \alpha_i=n$ . .

Остается случай комплексных корней, который может быть формально сведен к рассмотренным дробям, содержащим простые и кратные действительные корни. Поскольку квадратный трехчлен с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом имеет комплексно сопряженные корни, то формально рациональная дробь с квадратным трехчленом может быть представлена в виде.(2), где a_1 и a_2 комплексно сопряженные корни. При этом, неопределенные коэффициенты разложения, вообще говоря, являются комплексными. Последнее обстоятельство не является существенным для доказательства теоремы единственности разложения. Покажем это, рассмотрев по аналогии с действительными корнями три частных случая комплексных корней.

Разложение рациональной дроби, содержащей $2m$ простых комплексных корней, имеет вид

$$\frac{P(x)}{(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)...(x^2+p_mx+q_m)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{A_ix+B_i}{x^2+p_ix+q_i}. \tag{8}$$

Представим квадратный трехчлен в виде

$$x^2+p_ix+q_i=(x-b_i)(x-n_i^*),$$

где b_i и b_i^* - комплексно сопряженные его корни. Разложению (8) соответствует определитель системы уравнений для неопределенных действительных коэффициентов A_i и B_i

$$\Delta=\prod_{i>j}^{m}\left|b_i-b_j\right|.^2\left|b_i-b_j^*\right|^2 \tag{9}$$

Как видно, опять определитель Вандермонда, но в случае различных комплексных корней.

В случае n кратного комплексного корня имеем

$$\frac{P(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_ix+B_i}{(x^2+p_1x+q_1)^i}, \tag{10}$$

как в случае действительных корней, определитель имеет треугольный вид и равен единице.

В случае различных кратных комплексных корней, как в случае различных кратных действительных корней (7), имеем

$$\Delta=\prod_{i>j}\left(\left|b_i-b_j\right|.^2\left|b_i-b_j^*\right|^2\right)^{\beta_i\beta_j} \tag{11}$$

где β_i и β_j - кратности корней b_i и b_j, $\sum_i \beta_i=m.$

Наконец, в самом общем случае знаменателя (1) дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, т.е. наличия кратных действительных и кратных комплексных корней, определитель системы уравнений для неопределенных коэффициентов имеет вид

$$\Delta_n=\prod_{i>j}(a_i-a_j)^{\alpha_i\alpha_j}\prod_{k,l}\left(\left|a_k-b_l\right|.^2\left|a_k-b_l^*\right|^2\right)^{\alpha_k\beta_l}\prod_{f>s}\left(\left|b_f-b_s\right|.^2\left|b_f-b_s^*\right|^2\right)^{\beta_f\beta_s}$$

(12)

Фактически эта формула завершает доказательство теоремы и позволяет предсказать единственность разложения дробей с иной структурой. В качестве примера рассмотрим рациональную дробь со знаменателем

$$Q(x)=\prod_{i=1}^{r}(x^2+r_j x+s_j)^{\alpha_i}.\prod_{j=1}^{s}(x^2+p_j x+q_j)^{\beta_j}, \quad 2\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\right)=n,$$

$$\frac{p_j^{\ 2}}{4}-q_j<0. \ \frac{r_j^{\ 2}}{4}-s_j>0 \tag{13}$$

который следует из (1), если линейные множители $(x-a_1)(x-a_2)=x^2+r_1x+s_1$ разбить по парам и записать в виде квадратного трехчлена с неотрицательным дискриминантом, т.е. считая каждый из корней пары имеет одинаковую кратность. Имеет место единственное разложение дроби на сумму

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{\alpha_i}\frac{A_j^{(k)}x+B_j^{(k)}}{(x^2+r_jx+s_j)^k}+\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{\beta_j}\frac{C_j^{(k)}x+D_j^{(k)}}{(x^2+p_jx+q_j)^k}$$

Определитель системы уравнений для коэффициентов A,B,C,D имеет вид (12) и отличается лишь тем, что в (12) не входят разности пар корней квадратных трехчленов $x^2+r_jx+s_j$ с действительными корнями.

Преимущество подхода в изучении рациональных дробей, в сравнении с традиционным состоит в том, что доказательство теоремы единственности разложения проведено на основе метода неопределенных коэффициентов. В процессе доказательства теоремы одновременно демонстрируется метод неопределенных коэффициентов в различных его вариантах использования. Другими словами, параллельно рассматриваются два вопроса единственности различных вариантов разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших (простые корни, кратные корни, действительные и комплексные корни) и изучение метода неопределенных коэффициентов.

Наконец, получено компактное выражение теоремы в виде определителя (12) системы уравнений для определения коэффициентов разложения.

Литература

1. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Том I., Наука,1970 - 571 с.

2. Ильин В. А., Поздняк Э .Г. Основы математического анализа, том 1, Изд. ФМЛ, Москва, 1956. -472 с.

3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 2, Наука, «ФМЛ», 1972 - 795 с.

4. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Линейная алгебра, Изд. Наука, «Физматлит», Москва, 1999. -296 с.