УДК 532.4

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ – ОБЩИЙ ПОДХОД

Локтионов И. К., Гусар Г. А.

Донецкий национальный технический университет

Рекуррентные формулы некоторых численных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений получены с использованием квадратурных формул прямоугольников, трапеций и парабол.

Известно, что одним из эффективных способов вывода рабочих формул методов Рунге-Кутта решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений основан на геометрических построениях [1]. Однако, более естественным, а поэтому, возможно, более удобным для восприятия представляется подход, основанный на применении квадратурных формул.

Методы Рунге-Кутта обладают рядом характерных свойств:

1) они не требуют вычисления производных от $f(x,y)$, а требуют только вычисления значений $f(x,y)$;

2) согласуются с рядом Тейлора вплоть до членов порядка h^p, где степень p различна для различных методов и называется порядком метода;

3) значение y_{m+1} вычисляется по найденным значениям за некоторое число действий по одним и тем же формулам;

4) позволяют выполнять расчёты с переменным шагом;

5) все они (кроме метода Эйлера) имеют хорошую точность.

Недостатком всех методов является систематическое накопление ошибок – чем дальше значение x от начальной точки x_0, тем больше отклонение приближённого решения от точного.

Предлагаемый подход к изложению численных методов решения задачи Коши заключается в следующем.

Пусть требуется найти частное решение дифференциального уравнения (ДУ)

$$y' = f(x,y), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному условию $y_0 = y(x_0)$ в точках $x_{m+1} = x_m + m \cdot h$,

$m = \overline{0, n-1}$, $h > 0$. ДУ (1) может быть преобразовано к интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx\,, \qquad (2)$$

с помощью которого определяются значения искомой функции в точках x_m и x_{m+1}

$$y(x_m) = y_m = y_0 + \int_{x_0}^{x_m} f(x, y(x))dx\,, \qquad (3)$$

$$y(x_{m+1}) = y_{m+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x_{m+1}} f(x, y(x))dx\,. \qquad (4)$$

Вычитание из (4) (3) приводит к основному уравнению

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y(x))dx\,, \qquad (5)$$

связывающему значения y_m и y_{m+1} в двух соседних точках.

Численные методы решения задачи Коши отличаются друг от друга способами приближённого вычисления интеграла в правой части соотношения (5).

Предположим, что точка (x_m, y_m) на интегральной кривой известна.

1) **Метод Эйлера** (метод ломаных). Если подынтегральную функцию $f(x, y)$ в (5) заменить её значением в точке (x_m, y_m), то интеграл будет равен

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y)dx = f(x_m, y_m)\int_{x_m}^{x_{m+1}} dx = h \cdot f(x_m, y_m).$$

Такая замена равносильна применению формулы левых прямоугольников при вычислении определённого интеграла (точка x_m - левая граница отрезка $[x_m; x_{m+1}]$). В результате из (5) получаем вычислительную схему Рунге-Кутта первого порядка – метод Эйлера, согласующийся с рядом Тейлора вплоть до членов $\propto h$

$$y_{m+1}^{Э.} = y_m + h \cdot f(x_m, y_m)\,. \qquad (6)$$

Погрешность метода на каждом шаге $\propto h^2$, однако глобальная погрешность, в силу систематического накопления ошибок на каждом шаге $\propto h$.

Рассмотренный метод можно усовершенствовать по крайней мере двумя способами, которые связаны с формулой трапеций и формулой средних прямоугольников.

2) **Метода Эйлера-Коши**. Одним из методов Рунге-Кутта второго порядка с коррекцией по средней производной является так называемый исправленный метод Эйлера, который в литературе встречается также под названием второго улучшенного метода Эйлера и метода трапеций.

К вычислительной схеме метода приводит интерполирование подынтегральной функции $f(x,y)$ на отрезке $[x_m; x_{m+1}]$ многочленом первой степени, т.е. представление её в виде

$$f(x,y) = f(x_m, y_m) + \frac{f\left(x_{m+1}, y_{m+1}^{Э.}\right) - f(x_m, y_m)}{h}(x - x_m), \tag{7}$$

где значение $y_{m+1}^{Э.}$ вычисляется методом Эйлера (6).

Вычислив интеграл в правой части (5) с функцией (7) получим

$$y_{m+1}^{Э.-К.} = y_m + \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_m, y_m) + f\left(x_{m+1}, y_{m+1}^{Э.}\right)\right), \tag{8}$$

где $y_{m+1}^{Э.} = y_m + h \cdot f(x_m, y_m)$.

Подчеркнём, что интерполяция многочленом (7) геометрически приводит к замене интеграла в правой части (5) площадью трапеции.

3) **Модифицированный метод Эйлера**. Несколько более точное значение y_{m+1} искомой функции в точке x_{m+1} может быть получено с помощью модифицированного метода Эйлера (метод Рунге-Кутта второго порядка с коррекцией в средней точке, первый улучшенный метод Эйлера, метод срединных точек).

В основе метода лежит интерполирование функции $f(x,y)$ на отрезке $[x_m; x_{m+1}]$ её значением в средней точке $x_{m+1/2} = x_m + h/2$,

$y_{m+1/2} = y_m + \dfrac{h}{2} f(x_m, y_m)$. Положив, как это делается в методе средних прямоугольников, подынтегральную функцию в правой части равной её значению в средней точке отрезка $[x_m; x_{m+1}]$

$$f(x,y) = f\left(x_{m+1/2}, y_{m+1/2}\right), \tag{9}$$

после интегрирования (5) приходим к следующей вычислительной схеме

$$y_{m+1}^{М.Э.} = y_m + h \cdot f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} f(x_m, y_m) \right). \qquad (10)$$

Поскольку погрешность квадратурной формулы средних прямоугольников вдвое меньше погрешности формулы трапеций, то значение искомой функции y_{m+1}, вычисляемое по формуле (10) точнее, чем соответствующее значение, определяемое методом Эйлера-Коши (8).

Отметим, что метод Эйлера-Коши (8) и модифицированный метод Эйлера (10) согласуются с рядом Тейлора вплоть до членов $\propto h^2$.

4) Значения неизвестной функции y_{m+1} можно ещё более уточнить, если подынтегральную функцию $f(x, y)$ представить интерполяционным многочленом Ньютона. Учитывая значения $f(x, y)$ в точках (x_m, y_m), $(x_{m+1/2}, y_{m+1/2})$, (x_{m+1}, y_{m+1}), т.е. на концах отрезка $[x_m; x_{m+1}]$ и в его середине, получаем многочлен второй степени по x:

$$f(x, y) = f(x_m, y_m) + \frac{2\Delta f_m}{h}(x - x_m) + \frac{2\Delta^2 f_m}{h^2}(x - x_m)(x - x_{m+1/2}), \qquad (11)$$

где $\Delta f_m = f(x_{m+1/2}, y_{m+1/2}) - f(x_m, y_m) = f_{m+1/2} - f_m$,

$\Delta f_{m+1} = f(x_{m+1}, y_{m+1}) - f(x_{m+1/2}, y_{m+1/2}) = f_{m+1} - f_{m+1/2}$,

$\Delta^2 f_m = \Delta f_{m+1} - \Delta f_m = f_{m+1} - 2 f_{m+1/2} + f_m$.

Вычисление интеграла (5) с функцией (11) приводит к формуле

$$y_{m+1} = y_m + \Delta y_m = y_m + \frac{h}{6}\left(f_m + 4 f_{m+1/2} + f_{m+1}\right), \qquad (12)$$

которая носит название канонической формулы парабол (Симпсона). Она имеет более высокую точность по сравнению с квадратурными формулами трапеций и средних прямоугольников и позволяет построить несколько вычислительных схем для нахождения y_{m+1} по заданному y_m. Вычислительные схемы будут отличаться одна от другой способами определения значений $f_{m+1/2}$ и f_m, входящих в формулу парабол. Общей отличительной от «традиционных» методов – метода Эйлера и его модификаций, чертой всех способов вычисления y_{m+1} должна быть более высокая точность.

Рассмотрим несколько возможных вариантов этих схем.

1. Наиболее простой представляется следующая: методом Эйлера устанавлива-

ются значения

$$y_{m+1/2}^{Э.} = y_m + \frac{h}{2} f(x_m, y_m), \ y_{m+1}^{Э.} = y_m + hf(x_m, y_m),$$

а после этого вычисляются значения функции

$$f_{m+1/2} = f\left(x_{m+1/2}, y_{m+1/2}^{Э.}\right), \ f_{m+1} = f\left(x_{m+1}, y_{m+1}^{Э.}\right) \quad \text{и}$$

$$\Delta y_m = \frac{h}{6}\left(f_m + 4 f_{m+1/2} + f_{m+1}\right).$$

1. Этот вариант отличается от предыдущего уменьшением шага вдвое:

$$y_{m+1/2}^{Э.} = y_m + \frac{h}{2} f(x_m, y_m),$$

$$y_{m+1} = y_{m+1/2}^{Э.} + \frac{h}{2} f\left(x_{m+1/2}, y_{m+1/2}^{Э.}\right),$$

$$f_{m+1/2} = f\left(x_{m+1/2}, y_{m+1/2}^{Э.}\right),$$

$$f_{m+1} = f(x_{m+1}, y_{m+1}),$$

$$\Delta y_m = \frac{h}{6}\left(f_m + 4 f_{m+1/2} + f_{m+1}\right).$$

3. Комбинация метода парабол и метода Эйлера-Коши:

$$y_{m+1/2}^{Э.} = y_m + \frac{h}{2} f(x_m, y_m),$$

$$y_{m+1}^{Э.} = y_m + hf(x_m, y_m), \quad f_{m+1/2} = f\left(x_{m+1/2}, y_{m+1/2}^{Э.}\right).$$

$$y_{m+1}^{Э.-К.} = y_m + \frac{h}{2}\left(f(x_m, y_m) + f\left(x_{m+1}, y_{m+1}^{Э.}\right)\right),$$

$$f_{m+1} = f\left(x_{m+1}, y_{m+1}^{Э.-К.}\right).$$

$$\Delta y_m = \frac{h}{6}\left(f_m + 4 f_{m+1/2} + f_{m+1}\right).$$

2. Комбинация метода парабол и модифицированного метода Эйлера :

$$y_{m+1/2}^{Э.} = y_m + \frac{h}{2} f(x_m, y_m),$$

$$f_{m+1/2} = f\left(x_{m+1/2}, y_{m+1/2}^{Э.}\right),$$

$$y_{m+1}^{М.Э.} = y_m + hf\left(x_{m+1/2}, y_{m+1/2}^{Э.}\right),$$

$$f_{m+1} = f\left(x_{m+1}, y_{m+1}^{М.Э.}\right),$$

$$\Delta y_m = \frac{h}{6}\left(f_m + 4 f_{m+1/2} + f_{m+1}\right).$$

Точность в этом случае несколько выше, чем в случае 3.

5. Вычислительная схема имеет меньшую погрешность по сравнению с вариантами 1-4 и реализуется следующими рекуррентными формулами:

$$y^{\text{э.}}_{m+1/2} = y_m + \frac{h}{2} f\left(x_m, y_m\right),$$

$$f_{m+1/2} = f\left(x_{m+1/2}, y^{\text{э.}}_{m+1/2}\right),$$

$$y^{*}_{m+1/2} = y_m + \frac{h}{2} f\left(x_{m+1/2}, y^{\text{э.}}_{m+1/2}\right),$$

$$f^{*}_{m+1/2} = f\left(x_{m+1/2}, y^{*}_{m+1/2}\right),$$

$$\overline{f_{m+1/2}} = \frac{1}{2}\left(f_{m+1/2} + f^{*}_{m+1/2}\right),$$

$$f_{m+1} = f\left(x_{m+1}, y_m + h\overline{f_{m+1/2}}\right),$$

$$\Delta y_m = \frac{h}{6}\left(f_m + 4\overline{f_{m+1/2}} + f_{m+1}\right).$$

1. Метод Рунге-Кутта четвёртого порядка, наиболее распространённый на практике, может быть получен из предыдущего заменой $\overline{f_{m+1/2}}$ при вычислении f_{m+1} на $f^{*}_{m+1/2}$:

$$y^{\text{э.}}_{m+1/2} = y_m + \frac{h}{2} f\left(x_m, y_m\right),$$

$$f_{m+1/2} = f\left(x_{m+1/2}, y^{\text{э.}}_{m+1/2}\right),$$

$$y^{*}_{m+1/2} = y_m + \frac{h}{2} f\left(x_{m+1/2}, y^{\text{э.}}_{m+1/2}\right),$$

$$f^{*}_{m+1/2} = f\left(x_{m+1/2}, y^{*}_{m+1/2}\right),$$

$$\overline{f_{m+1/2}} = \frac{1}{2}\left(f_{m+1/2} + f^{*}_{m+1/2}\right),$$

$$f_{m+1} = f\left(x_{m+1}, y_m + hf^{*}_{m+1/2}\right),$$

$$\Delta y_m = \frac{h}{6}\left(f_m + 4\overline{f_{m+1/2}} + f_{m+1}\right).$$

Для иллюстрации возможностей представленных вариантов рассмотрим решение задачи Коши для ДУ $y' = 2y/x + x$, $y(1) = 0$ с помощью каждого из них (очевидно, что эта задача допускает точное решение). Результаты численного решения задачи Коши представлены в двух таблицах. Сравнение результатов, полученных «традиционными» методами (таблица 1) с результатами комбинированных методов (таблица 2) позволяет сделать вывод, что совместное использование формулы парабол и «традиционных» методов приводит к более точным значениям искомой функции (варианты 1, 3, 4 в таблице 2).

Таблица 1

x_m	$y_m^{Э.}$	$y_m^{Э.-К.}$	$y_m^{М.Э.}$	$y_m^{Р.-К.}$	Точное решение
1	0	0	0	0	0
1,2	0,2	0,253333	0,256364	0,26247	0,262543
1,4	0,506667	0,638095	0,645315	0,659336	0,659486
1,6	0,931429	1,166803	1,179315	1,202977	1,203209
1,8	1,484286	1,850265	1,869134	1,904107	1,904429
2,0	2,174127	2,697993	2,724253	2,772117	2,772589

Таблица 2.

x_m	$y_m^{Э.}\{1\}$	$y_m^{Э.-К.}\{3\}$	$y_m^{М.Э.}\{4\}$	$y_m^{К.Р.К.}\{5\}$	Точное решение
1	0	0	0	0	0
1,2	0,255354	0,258316	0,258485	0,262185	0,262543
1,4	0,642907	0,64981	0,650187	0,658715	0,659486
1,6	1,175141	1,18692	1,187541	1,201972	1,203209
1,8	1,862838	1,880399	1,881299	1,902671	1,904429
2,0	2,715489	2,739718	2,740928	2,770257	2,772589

Литература

1. Численные методы анализа - Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. - М., 1962 г.