УДК 51 (071)

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ВЫВОДУ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Улитин Г. М., Мироненко Л. П.
Донецкий национальный технический университет

За допомогою геометричних міркувань і визначення поняття директрис та фокусів отримані канонічні рівняння ліній другого порядку – еліпс, гіпербола, парабола. Запропонований підхід дозволяє вивести всі основні властивості ліній. Загальний підхід значно спрощує викладання що до ліній другого порядку і надає теорії загальний характер. Теорія дає можливість розглянути, крім очікуваних канонічних рівнянь ліній, частинні випадки, провести повну класифікацію що до ліній другого порядку.

Как известно, при изучении темы «Линии второго порядка» существует два подхода аналитический, когда из канонических уравнений выводят геометрические свойства этих линий [1] и геометрический, когда, например, эллипс определяется как геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до фокусов есть величина постоянная, выводится каноническое уравнение эллипса (гиперболы, параболы) [2-4].

В настоящей работе из геометрических соображений, с использованием директрис и фокусов, получены канонические уравнения линий второго порядка и выведены все их основные свойства.

Общее уравнение линий второго порядка имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{1}$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$ Обозначим левую часть уравнения $f(x, y)$ и перепишем уравнение (1) в виде: $f(x, y) = 0$.

Классифицируем все линии второго порядка как геометрическое место точек по значениям эксцентриситета ε - отношения расстояния от заданных двух точек (фокусы F_1 и F_2) до заданных двух параллельных прямых, расположенных симметрично фокусам (директрисы D_1 и D_2). Начало координат выберем в центре расстояния между фокусами.

Вначале рассмотрим случай, когда $\varepsilon = \dfrac{F_2M}{MK} < 1$. Ему соответствует рисунок 1.

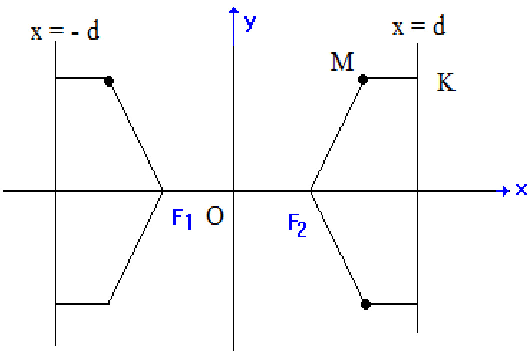

Рис. 1. Случай расположения фокусов между директрисами.

Из рисунка видно, что такому условию удовлетворяют четыре симметричные точки, т.е. линия является симметричной относительно осей координат. Тогда должны выполняться равенства:

$$f(-x,y) = f(x,y),\ f(x,-y) = f(x,y) \Rightarrow B = D = E = 0,$$

и уравнение (1) примет вид

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0. \tag{2}$$

При условии $\varepsilon < 1$ точка M может принадлежать осям Ox и Oy. Следовательно, $Cy^2 + F = 0 \Rightarrow C$ и F различных знаков, $Ax^2 + F = 0 \Rightarrow A$ и F различных знаков. Этот результат приводит к уравнению

$$Ax^2 + Cy^2 - F = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{F/A} + \frac{y^2}{F/C} = 1. \tag{3}$$

где $A > 0, C > 0, F > 0$. Обозначая $a^2 = \dfrac{F}{A}, b^2 = \dfrac{F}{B}$, приходим к каноническому уравнению эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

<u>Замечание 1</u>. Если в уравнении (3) положить $F = 0$, то получим точку

$(0{,}0)$.

Аналогично рассматривается случай, кола $\varepsilon > 1$. Ему соответствует рисунок 2.

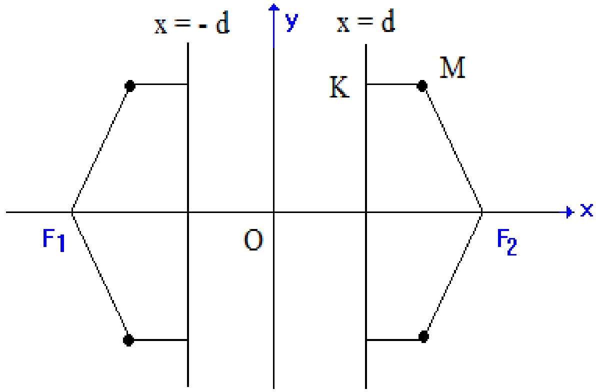

Рис. 2. Случай расположения директрис между фокусами.

Рассуждая аналогично, получаем уравнение (2). Точка M может принадлежать оси Ox, следовательно, A и F различных знаков. Исключая ранее рассмотренный случай, приходим к условию, что C и F одинаковых знаков. Этот результат приводит к уравнению

$$Ax^2 - Cy^2 - F = 0, \tag{5}$$

где $A > 0, C > 0, F > 0$. Обозначая $a^2 = \dfrac{F}{A}, b^2 = \dfrac{F}{B}$, получаем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

<u>Замечание 2</u>. Если положить $F = 0$, то получим

$$(\sqrt{A}x + \sqrt{C}y)(\sqrt{A}x - \sqrt{C}y) = 0$$

пару пересекающихся прямых $y = \pm\sqrt{\dfrac{A}{C}}x$.

Теперь рассмотрим случай, когда задана одна директриса и один фокус и

$\varepsilon = \dfrac{FM}{MK} = 1$. Располагаем центр системы координат в середине отрезка между фокусом и директрисой (рис. 3).

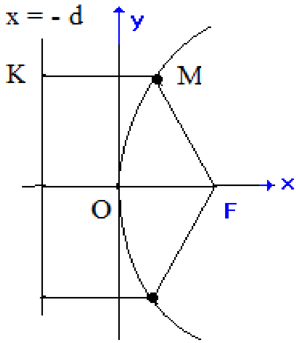

Рис. 3. Случай расположения центра системы координат посередине между фокусом и директрисой.

Линия симметрична относительно оси Ox, следовательно

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + F = 0. \tag{7}$$

В силу выбора системы координат линия проходит через начало координат, значит $F = 0$, следовательно уравнение линии имеет вид:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx = 0. \tag{8}$$

<u>Замечание 3</u>. Если положить $C = 0$, то получим $(Ax + 2D)x = 0$ – уравнение пары параллельных прямых $x = \dfrac{2D}{A}$ и $x = 0$. Если и $D = 0$, то получим пару совпадающих прямых.

Выделяя полный квадрат в (8), придем к одному из рассмотренных ранее двух случаев – эллипса и гиперболы (если не рассматривать вырожденные случаи). Чтобы исключить это, следует положить $A = 0$.

$$Cy^2 + 2Dx = 0. \tag{9}$$

Из рисунка видно, что при $\varepsilon = 1$ имеем $x \geq 0$, следовательно, C и D различных знаков. Уравнение примет вид:

$$Cy^2 - 2Dx = 0,\ \ C > 0,\ \ D > 0..$$

Обозначая $p = \dfrac{D}{C}$, приходим к каноническому уравнению параболы:

$$y^2 = 2px,\ p > 0. \tag{10}$$

Исходя из определений эллипса через эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{F_2M}{MK_2} = \dfrac{F_1M}{MK_1}$ и директрисы, нетрудно получить важное геометрическое свойство эллипса (рис.4):

$$F_1M + F_2M = MK_1 + MK_2 = 2\varepsilon d = const. \tag{11}$$

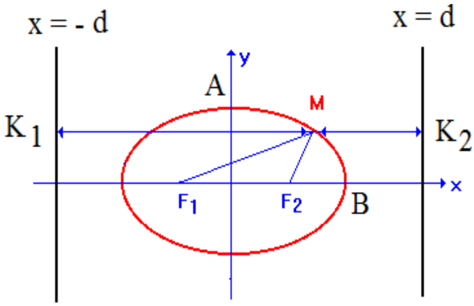

Рис. 4 Геометрическое свойство эллипса.

В частности, в точке *B* имеем $F_1M + F_2M = 2a$. Из этих равенств следует, что эллипс можно определить как геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.

Нетрудно установить связь между полуосями эллипса *a*, *b* и координатами фокусов $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. В точке *A* имеем $F_1A = F_2A = a$. Из прямоугольного треугольника имеем:

$$c^2 = a^2 - b^2. \tag{12}$$

Из равенства (11) следует $\varepsilon d = a$, находим уравнения директрис, выраженных через большую полуось

$$x. = \pm\frac{a}{\varepsilon}. \tag{13}$$

Аналогично, исходя из определения гиперболы через эксцентриситет и директрисы, нетрудно получить важное геометрическое свойство гиперболы (рис.5):

$$F_1M - F_2M = MK_1 - MK_2 = 2\varepsilon d = const. \tag{14}$$

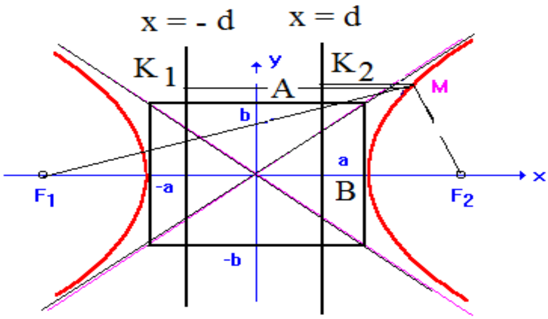

Рис.5. Геометрическое свойство гиперболы.

В точке *B* имеем $F_1M - F_2M = 2a.$ Из этих равенств следует, что гиперболу можно определить как г.м.т плоскости, для которых разность расстояний по модулю до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a.$.

Нетрудно установить связь между полуосями гиперболы *a*, *b* и координатами фокусов $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$. Из рисунка видно, что $|AB| = c$, откуда

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{15}$$

Из равенства (14) следует равенство $\varepsilon d = a,$ получаем уравнения директрис гиперболы (13).

Предложенный подход описания кривых второго порядка имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционным. В первую очередь, это компактность и геометрическая наглядность вывода канонических уравнений, в то время как в традиционном курсе, из-за громоздкости выкладок часто приходится записывать уравнения, объясняя лишь качественно, как они выводятся. Канонические уравнений линий второго порядка получены из уравнения второго порядка общего вида и геометрических определений линий второго порядка.

Литература

1. Делоне В.Н., Райков Д.А. Аналитическая геометрия, том 1, Гостехиздат, 1949 - 592 с.

2. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. — М.: ФМЛ, 1956. -272 с.

3. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра, Изд. ФМЛ, 2003 - 157 с.

4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии - 272 с.