УДК 378.14:[51:004]

ОПЫТ ПРОВЕДЕНИЯ ВУЗОВСКИХ ОЛИМПИАД ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ В ДонНТУ

Улитин Г. М., Савин А. И.
Донецкий национальный технический университет

В статті проаналізовано стан і задачі проведення щорічної вузівської олімпіади ДонНТУ з дисципліни «Вища математика». Наведено конкурсне завдання 2011 року.

С целью развития у студентов творческих способностей и повышения интереса к математике ежегодно в марте кафедра «Высшая математика» проводит вузовскую математическую олимпиаду.

Вузовская олимпиада позволяет выявить талантливых студентов и приобщить их к изучению математических моделей в области их будущих специализаций. Проведение олимпиады по высшей математике способствует повышению:

- мотивации студентов к изучению высшей математики;
- реализации творческого потенциала студентов;
- формированию и развитию математических компетенций студентов.

Вузовская олимпиада ДонНТУ по дисциплине «Высшая математика» является первым туром Всеукраинской студенческой олимпиады, проводимой по приказу Министерства образования и науки, молодёжи и спорта Украины. Студенты, победители первого тура олимпиады, награждаются дипломами, а также двое из них рекомендуются к участию во втором туре Всеукраинской олимпиады, которая регулярно проходит в Севастопольском национальном техническом университете.

Конкурсные задания вузовских олимпиад, также как и Всеукраинских, содержат десять задач различной сложности. Для успешной самореализации студента на олимпиаде необходимо, чтобы уровень сложности заданий подчинялся принципу посильности и творческой самостоятельности участников. А так как большинство участников вузовской олимпиады студенты первого курса, то для выполнения указанного выше требования, а также для достижения равенства возможностей участников, конкурсные задания не должны содержать задач по тем разделам математики, которые на момент проведения олимпиады не изучены студентами первого курса.

Структура конкурсных заданий вузовской олимпиады год из года не меняется и, как правило, они содержат задачи по линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии, задачи по математическому анализу (задачи на нахождение предела последовательности, предела функции, производной функции, задачи на применение производной и на вычисление интеграла).

В качестве примера приведём задачи 2011 года и указания к их решению.

Конкурсное задание 2011 года

Задача 1. Доказать, что $\begin{vmatrix} \sin 1 & \sin 2 & \sin 3 \\ \sin 4 & \sin 5 & \sin 6 \\ \sin 7 & \sin 8 & \sin 9 \end{vmatrix} = 0$.

Указание. Прибавим элементы первого столбца к соответствующим элементам третьего столбца.

$$\begin{vmatrix} \sin 1 & \sin 2 & 2\sin 2\cos 1 \\ \sin 4 & \sin 5 & 2\sin 5\cos 1 \\ \sin 7 & \sin 8 & 2\sin 8\cos 1 \end{vmatrix} = 2\cos 1 \begin{vmatrix} \sin 1 & \sin 2 & \sin 2 \\ \sin 4 & \sin 5 & \sin 5 \\ \sin 7 & \sin 8 & \sin 8 \end{vmatrix} = 0$$

Задача 2. Существует ли матрица A такая, что

$$A \cdot A^T - A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Указание. Заметим, что только матрица размера 2×2 может удовлетворять условию. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда

$$A \cdot A^T - A^T \cdot A = \begin{pmatrix} b^2 - c^2 & \dots \\ \dots & c^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

Сумма элементов главной диагонали полученной матрицы равна 0, а сумма элементов главной диагонали единичной матрицы равна 2. $0 \neq 2$

Ответ: не существует.

Замечание. Также рассуждая, можно доказать, что не существует матриц A и B таких, что $A \cdot B - B \cdot A = E$.

Задача 3. **[1]** Точки A_1, A_2, A_3 - вершины правильного треугольника, центр которого – точка O. Доказать, что для любой точки M на плоскости $\overline{MO} = \frac{1}{3}\left(\overline{MA_1} + \overline{MA_2} + \overline{MA_3}\right)$.

Указание. Перепишем равенство

$$(\overline{MA_1}-\overline{MO})+(\overline{MA_2}-\overline{MO})+(\overline{MA_3}-\overline{MO})=\overline{0}\text{, или } \overline{OA_1}+\overline{OA_2}+\overline{OA_3}=\overline{0}.$$

Так как вектор $\overline{OA_1}+\overline{OA_2}+\overline{OA_3}$ при повороте на угол $\frac{2\pi}{3}$ не меняется и $\frac{2\pi}{3}<2\pi$, то он равен $\overline{0}$.

Задача 4. Доказать, что последовательность

$$a_1=1,\ a_{n+1}=3-\frac{1}{2}a_n,\ n\in N,$$

имеет предел, и найти этот предел.

Указание. Последовательность может быть записана в явном виде $a_{n+1}=2+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.

Ответ: 2.

Задача 5. [2] Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}$.

Указание. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}=\left|t=\frac{1}{x^2}\right|=\lim\limits_{t\to+\infty}t^2\cdot e^{-t}=0$.

Ответ: 0.

Задача 6. [3] Доказать формулу $\left(x^n\ln x\right)^{(n)}=n!\left(\ln x+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right),\ x>0$.

Указание. Доказательство методом мат. индукции.

$$\left(x^{n+1}\ln x\right)^{(n+1)}=\left((x^{n+1}\ln x)'\right)^{(n)}=\left((n+1)x^n\ln x+x^n\right)^{(n)}=$$

$$=(n+1)\left(x^n\ln x\right)^{(n)}+n!=(n+1)n!\left(\ln x+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+n!=$$

$$=(n+1)!\left(\ln x+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right).$$

Задача 7. [4] Доказать, что отрезок любой касательной к гиперболе $y=\frac{1}{x}$, который лежит между её асимптотами, делится точкой касания пополам.

Указание.

Уравнение касательной к гиперболе в точке $O\left(a;\frac{1}{a}\right)$

$$y=\frac{2}{a}-\frac{1}{a^2}x.$$

Касательная пересекает ось Ox в точке $A(2a;0)$, ось Oy в точке $B\left(0;\frac{2}{a}\right)$.

O - середина AB.

Задача 8. [5] Найти все положительные числа a, такие, что неравенство $a^x \ge ax$ справедливо при всех $x>0$.

Указание. Графики функций $y=a^x$ и $y=ax$ пересекаются в точке $(1;a)$. Чтобы неравенство было справедливо при всех $x>0$, графики должны касаться в этой точке, то есть $a\ln a=a,\ a=e$.

Ответ: $a=e$.

Задача 9. [6] Многочлен степени n имеет n различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?

Указание. Два последовательных коэффициента многочлена не могут быть равными нулю одновременно. (Пусть коэффициент при x^k и x^{k+1} равны нулю. Тогда $P_n^{(k)}(x)$ имеет нулевой свободный коэффициент и нулевой коэффициент при x, то есть корень $x=0$ кратности 2, что невозможно, т.к. все корни $P_n^{(k)}(x)$ должны быть различными).

Ответ: $\frac{n}{2}$, при чётном n; $\frac{n+1}{2}$, при нечётном n.

Задача 10. Найти $\int\frac{\sin 4xdx}{\sqrt{1+\cos^2 x}+\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

Указание.

$$\int\frac{\sin 4xdx}{\sqrt{1+\cos^2 x}+\sqrt{1+\sin^2 x}}=\int\frac{\sin 4x\left(\sqrt{1+\cos^2 x}-\sqrt{1+\sin^2 x}\right)}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx=$$

$$=2\int\sqrt{1+\cos^2 x}\cdot 2\sin x\cos xdx-\int\sqrt{1+\sin^2 x}\cdot 2\sin x\cos xdx=$$

$$=-\frac{4}{3}\left((1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}+(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}\right)+C.$$

На основании проверки и анализа работ члены жюри отметили, что задачи 1, 2 и 10 были самыми «успешными» для студентов, то есть они были полностью решены многими участниками олимпиады.

В вузовской олимпиаде 2011 года приняли участие студенты 1, 2 и 4 курсов всех факультетов ДонНТУ. Первое место занял студент 4 курса факультета компьютерных наук и технологий, который активно себя проявлял и на вузовских олимпиадах предыдущих лет, а также по результатам Всеукраинской олимпиады 2010 года получил диплом третьей степени за занятое третье место в категории Т. Также на Вузовской олимпиаде 2011 года призёрами стали два студента первого курса факультетов КИТА и КНТ нашего университета, один из которых на Всеукраинской олимпиаде 2011 года получил диплом второй степени за занятое второе место в категории Т.

В заключение хотелось бы отметить, что интерес студентов к олимпиадам не угас, и, надеемся, не угаснет, что студенты ДонНТУ показывали и будут показывать высокий уровень подготовки как на вузовских, так и на Всеукраинских олимпиадах. Так, число участников вузовской олимпиады ежегодно растёт и в 2011 году составляло 173 студента, что почти вдвое больше, чем в 2010 году.

Литература

1. Вышенский В.А. и др. Сборник задач киевских математических олимпиад. - К.: Вища школа. - 1984. - 240с.

2. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. - М.: ФИЗМАТЛИТ. - 2003. - 496с.

3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М.: Изд-во Моск. ун-та. - 1997. - 624с.

4. Всеукраинские олимпиады по математике среди студентов технических, экономических и аграрных вузов: 2007-2010./ДеркачМ.И. и др. С.: Издательство СевНТУ. - 2009. - 84с.

5. Садовничий В.А. и др. Задачи студенческих математических олимпиад. - М.: Издательство МГУ. - 1987. - 310с.

6. Агахонов Н.Х. и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006. - М.:МЦНМО. - 2007. - 472с.