УДК 51 (071)

ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ И ПРАВИЛО КРАМЕРА

Мироненко Л.П., Кайда С.В.
Донецкий национальный технический университет

Правило Крамера щодо розв'язку лінійної системи рівнянь може бути розглянуто в інший спосіб від традиційного. Саме, новий підхід використовує теорему умноження визначників. Запропонований метод відрізняється тим, що допоміжні визначники створюються природнім шляхом.

При выводе правила Крамера решения систем линейных уравнений выполняется ряд формальных действий над системой уравнений (умножение каждого уравнения системы на соответствующее алгебраическое дополнение, затем сложить левую и правую части уравнений и т.д.), которые не имеют ясной логики и поэтому требуют запоминания целой последовательности действий. Это снижает наглядность метода, точнее, процедуры получения формул Крамера [1-4].

Рассмотрим квадратную систему трех линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{13}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1}$$

с невырожденной основной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ \Delta = \det A \neq 0. \tag{2}$$

Предположение $\Delta \neq 0$ означает совместность системы (1).

Введем в рассмотрение матрицу

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

детерминант которой $\det X_1 = x_1$ и найдем произведение матриц AX_1, получим

$$AX_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

С другой стороны, применим к матричному равенству теорему умножения определителей $\det(AB)=\det A\cdot\det B$, получим

$$\det(AX_1)=\det A\cdot\det X_1=\Delta\cdot\det X_1. \tag{5}$$

Обозначим $\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ - вспомогательный определитель и припавняем (4) и (5), получим $\Delta\cdot\det X_1=\Delta_1.$ Учитывая, что $\det X_1=x_1$, получим формулу Крамера

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Повторим процедуру для матриц

$$X_2=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix}, \det X_2=x_2, X_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}, \det X_3=x_3,$$

и введем вспомогательные определители

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

получим остальные формулы Крамера $x_j=\dfrac{\Delta_j}{\Delta},\ \ j=2,3.$

Методика легко обобщается на случай квадратной системы линейных уравнений произвольной размерности n

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2; \\ ... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{6}$$

В этом случае введем матрицу X_j, которая получается из единичной заменой j –го столбца на столбец неизвестных

$$X_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & x_1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & x_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & x_n & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \ \det X_j = x_j. \qquad (7)$$

Произведение матриц AX_j равно матрице вспомогательного определителя

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Применим теорему умножения определителей к равенству $AX_j = A_j$, получим $\det A \cdot \det X_j = \Delta_j$ и формулы Крамера

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \ j = 1,2,\ldots,n. \qquad (8)$$

Сделаем замечание относительно единственности решения системы. Если определитель Δ системы (6) не равен нулю, то, согласно формул Крамера (8) решение единственное. В самом деле, предположим, что наряду с решением $x_i, i = 1,2,\ldots n$ системы (6) существует какое-либо другое решение $y_i, i = 1,2,\ldots n$. В этом случае, вместо матрицы (7) возьмем аналогичную, но заменим x_i на y_i. В результате получим решение $y_j = \Delta_j / \Delta, \ j = 1,2,\ldots,n,$. Что совпадает с формулами (8).

Обычно единственность решения доказывается также от противного, предполагая, что кроме решения $x_i, i = 1,2,\ldots n$ существует какое-либо другое решение $y_i, i = 1,2,\ldots n$ системы (6). Эту систему запишем кратко, используя соглашение о суммировании [5]

$$a_{ij} x_j = b_j, i, j = 1,2,\ldots n.$$

Подставив эти решения в систему, получим две системы тождеств $a_{ij} x_j = b_j$ и $a_{ij} y_j = b_j$. Вычитая почленно соответствующие равенства, получим однородную систему $a_{ij}(x_j - y_j) = 0$ с отличным от нуля определителем $|a_{ij}|$. Такая система имеет только тривиальное решение $x_i - y_i = 0$, откуда $x_i = y_i$ для всех i.

Предложенный подход к изучению правила Крамера является оригинальным и значительно упрощает общепринятый вывод формул Крамера. Следует отметить, что появление вспомогательных определителей метода является естественным продуктом метода и происходит в результате произведения матриц и последующего применения теоремы умножения определителей. Такой подход делает метод предельно простым.

Литература

1. Делоне В.Н., Райков Д.А. Аналитическая геометрия, том 1, Гостехиздат, 1949 - 592 с.
2. Привалов И.И. Аналитическая геометрия, Изд. ФМЛ, Москва, 1956. - 272 с.
3. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра ФМЛ, 2003 - 157 с.
4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии- 272 с.
5. Мироненко Л.П. Соглашение о суммировании в линейной алгебре. – Сб. Науково-методичних робіт - Донецьк: ДонНТУ. 2009, вип. 6, с.85-92.