УДК 531.38

УРАВНЕНИЕ ГОДОГРАФОВ В ОПОРНОМ БАЗИСЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПО ИНЕРЦИИ СИСТЕМЫ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА

М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева

Донецкий национальный технический университет

Если момент количества движения системы тел, сохраняющий направление в пространстве, отличен от нуля, то его можно использовать для построения неподвижных годографов [1]. Существует решение, характеризуемое нулевым значением момента количества движения системы. Для этого решения, следуя [2], введен опорный базис на траектории центра сферического шарнира. Найдены кривизна и кручение траектории, скорость каждого из тел относительно опорного базиса. Впервые построены годографы тел в опорном базисе. Записаны уравнения подвижных годографов тел.

В пятой главе монографии [3] дана постановка задачи о движении по инерции двух динамически осесимметричных тел, сочлененных упругим сферическим шарниром. Там же приведены кинематические и динамические характеристики системы тел и шесть форм уравнений движения. Нам понадобятся из них две формы уравнений движения, которые мы приведем здесь.

Исходные соотношения. Первая форма уравнений движения[1] (5.38)$_*$–(5.40)$_*$ имеет вид:

$$\dot{G}_1+\omega_2 G_3-\omega_3 G_2=0,\quad \dot{G}_2+\omega_3 G_1-\omega_1 G_3=0,\quad \dot{G}_3+\omega_1 G_2-\omega_2 G_1=0. \quad (1)$$

Здесь компоненты G_i вектора $\mathbf{g}=G_1\mathbf{e}_1+G_2\mathbf{e}_2+G_3\mathbf{e}_3$ даны соотношениями (5.15)$_*$–(5.17)$_*$

$$\begin{gathered} G_1=\left(A-N\cos\theta\right)\omega_1+\left(A_0-N\cos\theta\right)\Omega_1, \\ G_2=\left(A-N\cos\theta\right)\omega_2+\left(A_0\cos\theta-N\right)\Omega_2-n_0\sin\theta, \\ G_3=\left(A_0\Omega_2-N\,\omega_2\right)\sin\theta+n+n_0\cos\theta. \end{gathered} \quad (2)$$

Вторая форма уравнений движения представлена уравнениями (5.41)$_*$–(5.44)$_*$, (5.6)$_*$, (5.11)$_*$, приведем здесь (5.43)$_*$, (5.44)$_*$, (5.6)$_*$, (5.11)$_*$.

---

[1] Номера уравнений работы [3] снабжены звездочкой

$$A_0\left(\dot{\Omega}_1-\Omega_2\Omega_3\right)+n_0\Omega_2=-\Pi'(\theta)+N\left[\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)\sin\theta+\left(\dot{\omega}_1-\omega_2\omega_3\right)\cos\theta\right], \quad (3)$$

$$A_0\left(\dot{\Omega}_2+\Omega_3\Omega_1\right)-n_0\Omega_1=N\left(\dot{\omega}_2+\omega_3\omega_1\right),$$

$$\dot{\theta}=\Omega_1-\omega_1, \quad (4)$$

$$J\left(\omega_3+\dot{\varphi}\right)=n, \qquad J_0\left(\Omega_3+\dot{\Phi}\right)=n_0. \quad (5)$$

Рассмотрим указанное в [3, гл. 10] решение, характеризуемое нулевым значением постоянной момента количества движения системы тел $\mathbf{g}=\mathbf{0}$, тогда величины $G_i=0$ удовлетворяют системе (1).

Предположим, что одно из тел системы закреплено в центре масс

$$N=0. \quad (6)$$

Тогда при ограничении (6) компоненты (2) принимают вид:

$$G_1=A\omega_1+A_0\Omega_1=0,$$
$$G_2=A\omega_2+A_0\Omega_2\cos\theta-n_0\sin\theta=0, \quad (7)$$
$$G_3=A_0\Omega_2\sin\theta+n+n_0\cos\theta=0.$$

Из соотношений (7) находим

$$\omega_1=-\frac{A_0\Omega_1}{A}, \quad (8)$$

$$\omega_2=\frac{n_0+n\cos\theta}{A\sin\theta}, \quad (9)$$

$$\Omega_2=-\frac{n_0\cos\theta+n}{A_0\sin\theta}. \quad (10)$$

Запишем уравнения (3) при ограничении (6)

$$\dot{\Omega}_1-\Omega_2\Omega_3=-\frac{n_0}{A_0}\Omega_2-\frac{\Pi'(\theta)}{A_0}, \quad (11)$$

$$\dot{\Omega}_2+\Omega_3\Omega_1=\frac{n_0}{A_0}\Omega_1. \quad (12)$$

Умножая первое уравнение на Ω_1, второе – на Ω_2 и складывая, получим

$$\dot{\Omega}_1\,\Omega_1 + \dot{\Omega}_2\,\Omega_2 = -\frac{\Pi'(\theta)}{A_0}\Omega_1. \tag{13}$$

Вместо Ω_1 введем новую переменную

$$\sigma^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2, \tag{14}$$

тогда уравнение (13) принимает вид

$$\sigma\dot{\sigma} = -\frac{\Pi'(\theta)}{A_0}\Omega_1. \tag{15}$$

Подставив (8) в (4), получим

$$\dot{\theta} = \frac{\Omega_1}{k_*}, \tag{16}$$

где введен новый параметр $k_* = \dfrac{A}{A + A_0}$ $\left(0 < k_* < 1\right)$.

В уравнении (15) перейдем от дифференцирования по t к дифференцированию по θ, с учетом (16) получим

$$\sigma\sigma' = -\frac{\Pi'(\theta)\,k_*}{A_0} \tag{17}$$

(предполагаем, что Ω_1 отлично от нуля).

Так как в этом решении $\Pi(\theta)$ является произвольной дифференцируемой функцией, можно ее конкретизировать, например, так $\Pi(\theta) = -c^2\cos\theta$, тогда уравнение (17) запишем в виде $\sigma\sigma' = -\dfrac{c^2 k_* \sin\theta}{A_0}$. В результате интегрирования получим

$$\sigma^2 = \sigma_0^2\left(1 + b\cos\theta\right), \tag{18}$$

где введен безразмерный параметр $b=\dfrac{2k_*c^2}{A_0\sigma_0^2}$, а σ_0^2 – постоянная интегрирования.

Вместо переменной θ введем переменную u

$$u=\cos\theta \tag{19}$$

и запишем ω_2, Ω_2, σ, Ω_1 как функции u. Для этого подставим (19) в (9), (10), (18), (14):

$$\omega_2=\frac{n_0+nu}{A\sqrt{1-u^2}}, \tag{20}$$

$$\Omega_2=\frac{-(n_0u+n)}{A_0\sqrt{1-u^2}}, \tag{21}$$

$$\sigma^2=\sigma_0^2(1+bu), \tag{22}$$

$$\Omega_1^2=\frac{\sigma_0^2(1+bu)(1-u^2)-(n_0u+n)^2/A_0^2}{1-u^2}. \tag{23}$$

Умножим обе части уравнения (16) на $\sin\theta$, учтем замену (19), получим

$$\dot{u}=-\frac{1}{k_*}\Omega_1(u). \tag{24}$$

Подставив (23) в (24), установим зависимость времени t от переменной u

$$\sigma_0(t-t_0)=-k_*\int\limits_u^u\frac{du}{\sqrt{(1+bu)(1-u^2)-(n_0u+n)^2/A_0^2\sigma_0^2}}. \tag{25}$$

Отметим, что $\sigma_0(t-t_0)$ есть безразмерное время.

Соотношениями (23), (22) и (8), (20), (5) заданы годографы тел S_0 и S в полуподвижных базисах. Чтобы найти годографы тел в неизменно связанных с телами базисах, необходимо определить углы собственных вращений Φ, φ.

Перепишем уравнения (5) в виде

$$\dot{\varphi} = \frac{n}{J} - \omega_3, \quad \dot{\Phi} = \frac{n_0}{J_0} - \Omega_3, \tag{26}$$

где Ω_3, ω_3 определены в [3] соотношениями (5.55)$_*$

$$\omega_3 = \left(\Omega_2 - \omega_2 \cos\theta\right)/\sin\theta, \quad \Omega_3 = \left(\Omega_2 \cos\theta - \omega_2\right)/\sin\theta. \tag{27}$$

Внесем (19) – (21) в (27) определим $\Omega_3(u)$, $\omega_3(u)$:

$$\omega_3(u) = \frac{n}{A} - \frac{n_0 u + n}{A_0 k_*\left(1-u^2\right)}, \tag{28}$$

$$\Omega_3(u) = \frac{n_0}{A_0} - \frac{nu + n_0}{A_0 k_*\left(1-u^2\right)}. \tag{29}$$

Подставив эти соотношения в уравнения (26), получим

$$\dot{\Phi} = \left(\frac{n_0}{J_0} - \frac{n_0}{A_0}\right) + \frac{nu + n_0}{A_0 k_*\left(1-u^2\right)}, \quad \dot{\varphi} = \left(\frac{n}{J} - \frac{n}{A}\right) + \frac{n_0 u + n}{A_0 k_*\left(1-u^2\right)}.$$

При интегрировании этих уравнений, с учетом (24), находим углы собственных вращений тел. S_0, S:

$$\Phi - \Phi_0 = \left(\frac{1}{J_0} - \frac{1}{A_0}\right) n_0 t - \int_{u_0}^{u} \frac{\left(nu + n_0\right) du}{\left(1-u^2\right)\sqrt{A_0^2 \sigma_0^2 (1+bu)\left(1-u^2\right) - \left(n_0 u + n\right)^2}}, \tag{30}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \left(\frac{1}{J} - \frac{1}{A}\right) nt - \int_{u_0}^{u} \frac{\left(n_0 u + n\right) du}{\left(1-u^2\right)\sqrt{A_0^2 \sigma_0^2 (1+bu)\left(1-u^2\right) - \left(n_0 u + n\right)^2}}. \tag{31}$$

В подынтегральных выражениях правых частей (25), (30), (31) в знаменателе имеется $\sqrt{A_0^2 \sigma_0^2 (1+bu)\left(1-u^2\right) - \left(n_0 u + n\right)^2}$. Заменой $n_0 = A_0 \sigma_0 n_0^*$, $n = A_0 \sigma_0 n^*$ преобразуем подкоренное выражение к такому виду: $A_0^2 \sigma_0^2 \left[(1+bu)\left(1-u^2\right) - \left(n_0^* u + n^*\right)^2\right] = A_0^2 \sigma_0^2 P_3(u)$, где $P_3(u) = (1+bu)\left(1-u^2\right) - \left(n_0^* u + n^*\right)^2$. При $u = \pm 1$ $P_3(\pm 1) = -\left(n^* \pm n_0^*\right)^2 < 0$, а при $u = 0$ $P_3(0) = 1 - \left(n^*\right)^2$. Если постоянная

$(n^*)^2 < 1$, то всегда существует интервал, содержащий точку $u = 0$, в которой подынтегральное выражение больше нуля. Следовательно, при выполнении условия $(n^*)^2 < 1$ всегда существует, по крайней мере, один интервал, в котором подкоренное выражение больше нуля.

Основные переменные отнесены к полуподвижным базисам, а необходимо иметь кинематические характеристики в базисах, неизменно связанных с телами.

Неизменный в S базис $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*$ связан с $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ соотношениями (5.30)* в [3]

$$\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi, \quad \mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2 \cos\varphi, \quad \mathbf{e}_3^* = \mathbf{e}_1 \qquad (32)$$

и для компонент $\omega_1^*,\ \omega_2^*$ угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1^*\mathbf{e}_1^* + \omega_2^*\mathbf{e}_2^* + \omega_3^*\mathbf{e}_3$ получаем значения

$$\omega_1^* = \omega_1\cos\varphi + \omega_2\sin\varphi, \quad \omega_2^* = -\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi, \quad \omega_3^* = n/J\,. \qquad (33)$$

Неизменный в S_0 базис $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^{0*}$ связан с $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ соотношениями [3] (5.35)*
$\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi, \quad \mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2 \cos\varphi, \quad \mathbf{e}_3^* = \mathbf{e}_3$ и для компонент $\Omega_1^*,\ \Omega_2^*,\ \Omega_3^*$ угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}_*$ тела S_0

$$\Omega_1^* = \Omega_1 \cos\Phi + \Omega_2 \sin\Phi,\ \Omega_2^* = -\Omega_1 \sin\Phi + \Omega_2 \cos\Phi,\ \Omega_3^* = n_0/J_0 \qquad (34)$$

($\omega_3^* = \omega_3 + \dot{\varphi} = n/J$, $\quad \Omega_3^* = \Omega_3 + \dot{\Phi} = n_0/J_0$ – следствие циклических интегралов (5)).

Так как ω_1, ω_2, ω_3 и φ известны как функции переменной u, то подставив (8), (20), (28), (31) в (33), сможем найти компоненты угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_*$ тела S. Аналогично, подставив (23), (21), (29), (30) в (34), сможем определить компоненты угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}_*$ тела S_0.

Опорный базис. Для построения аксоидов в работах [3], [2] использовались две системы координат: одна – неизменно связанная с движущимся телом, а другая – выбрана в неподвижном пространстве. В этих работах фигурировал неподвижный в пространстве вектор, компоненты которого по отношению к движущимся осям определялись в зависимости от времени (или вспомогательной переменной) вместе с компонентами угловой скорости тела в этих осях. Иногда в прикладных задачах возникает необходимость изучать движение тела по отношению к осям, которые в свою очередь движутся в неподвижном пространстве. В работе [2] выделен случай, когда движущаяся опорная система координат, определена естественным базисом на траектории одной из точек движущегося тела.

В случае нулевого значения момента количества движения системы тел, при решении задачи отсутствует имеющий физический смысл вектор, фиксированный в неподвижном пространстве и задаваемый своими компонентами в осях, связанных с телом. Однако в осях, связанных с телом, определен вектор абсолютной скорости точки *O* (центра сферического шарнира), и это дает возможность строить полное решение на основе работы [2].

В монографии [3] указаны радиус-вектор $\mathbf{r}_*$, скорость $\mathbf{v}_*$ и ускорение $\mathbf{w}_*$ точки *O*. При обращении в нуль параметра N [3] (5.13)$_*$ $N = \dfrac{m\,m_0}{m+m_0} l\, l_0$ необходимо рассматривать два варианта

$$l = 0, \quad l_0 = 0. \tag{35}$$

При этом обращается в нуль один из параметров [3] (5.23)*

$$a = \frac{m\,l}{m+m_0}, \qquad a_0 = \frac{m_0 l_0}{m+m_0}.$$

Из двух возможностей (35) выбираем первую

$$a_0 = 0 \tag{36}$$

(вторая – рассматривается аналогично).

Запишем векторы $\mathbf{r}_*$, $\mathbf{v}_*$, $\mathbf{w}_*$ [3] (5.22)$_*$, (5.24)$_*$, (5.27)$_*$ – (5.29)$_*$ при ограничении (36)

$$\mathbf{r}_* = -a_0 \mathbf{e}_3^0,$$
$$\mathbf{v}_* = a_0\left(-\Omega_2 \mathbf{e}_1 + \Omega_1 \mathbf{e}_2^0\right), \tag{37}$$
$$\mathbf{w}_* = a_0\left\{-\left(\dot{\Omega}_2 + \Omega_3\Omega_1\right)\mathbf{e}_1 + \left(\dot{\Omega}_1 - \Omega_2\Omega_3\right)\mathbf{e}_2^0 + \left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\right)\mathbf{e}_3^0\right\}. \tag{38}$$

Подставив (11), (12), (14), (17) в (38) определим $\mathbf{w}_*$:

$$\mathbf{w}_* = a_0\left[-\frac{n_0}{A_0}\Omega_1\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\sigma\sigma'}{k_*} - \frac{n_0}{A_0}\Omega_2\right)\mathbf{e}_2^0 + \sigma^2\mathbf{e}_3^0\right]. \tag{39}$$

В дальнейшем потребуется вектор $\overset{\bullet}{\mathbf{w}}_*$

$$\overset{\bullet}{\mathbf{w}}_* = \overset{\bullet}{w}_1\mathbf{e}_1 + \overset{\bullet}{w}{}_2^0\mathbf{e}_2^0 + \overset{\bullet}{w}{}_3^0\mathbf{e}_3^0 + \Omega\times\mathbf{w}_*, \tag{40}$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ – угловая скорость базиса $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_2\mathbf{e}_2^0 + \Omega_3\mathbf{e}_3^0. \tag{41}$$

Продифференцировав $w_1,\ w_2^0,\ w_3^0$, находим

$$\overset{\bullet}{w}_1 = -\frac{a_0 n_0\overset{\bullet}{\Omega}_1}{A_0},\ \overset{\bullet}{w}_2 = a_0\left(\frac{\sigma\sigma'}{k_*} - \frac{n_0}{A_0}\Omega_2\right)^{\bullet},\ \overset{\bullet}{w}_3 = 2a_0\sigma\overset{\bullet}{\sigma}. \tag{42}$$

Опорный базис $\mathbf{э}_1\mathbf{э}_2\mathbf{э}_3$, следуя [4, с. 96–99], вводим следующим образом

$$\mathbf{э}_1 = \frac{\mathbf{v}_*}{v_*},\qquad \mathbf{э}_2 = \frac{\mathbf{B}_*\times\mathbf{v}_*}{|\mathbf{B}_*\times\mathbf{v}_*|},\qquad \mathbf{э}_3 = \frac{\mathbf{B}_*}{B_*}, \tag{43}$$

где $\mathbf{B}_*$ – вектор бинормали

$$\mathbf{B}_* = \mathbf{v}_*\times\mathbf{w}_* = B_1\mathbf{e}_1 + B_2^0\mathbf{e}_2^0 + B_3^0\mathbf{e}_3^0. \tag{44}$$

Запишем его разложение в базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$, подставив (37), (39) в (44):

$$\mathbf{B}_* = a_0^2\left(\Omega_1\sigma^2\mathbf{e}_1 + \Omega_2\sigma^2\mathbf{e}_2^0 + \left(-\frac{\sigma\sigma'}{k_*}\Omega_2 + \frac{n_0}{A_0}\sigma^2\right)\mathbf{e}_3^0\right). \tag{45}$$

Модули векторов $\mathbf{v}_*,\ \mathbf{B}_*,\ \mathbf{B}_*\times\mathbf{v}_*$ находим из (37), (45) с учетом (22):

$$v_* = a_0\sigma, \tag{46}$$

$$B_*^2 = a_0^4\left[\sigma^6 + \left(\frac{n_0}{A_0}\sigma^2 - \frac{\sigma\sigma'}{k_*}\Omega_2\right)^2\right], \tag{47}$$

$$\left|\mathbf{B}_* \times \mathbf{v}_*\right| = B_* v_* .$$

Теперь опорный базис (43) определяем, воспользовавшись соотношениями (37), (45), (47)

$$\begin{gathered} \text{э}_1 = \left(-\frac{\Omega_2}{\sigma}\mathbf{e}_1 + \frac{\Omega_1}{\sigma}\mathbf{e}_2^0\right), \\ \text{э}_2 = \text{э}_3 \times \text{э}_1 , \\ \text{э}_3 = \frac{a_0^2}{B_*}\left(\Omega_1\sigma^2\mathbf{e}_1 + \Omega_2\sigma^2\mathbf{e}_2^0 + \left(\frac{n_0}{A_0}\sigma^2 - \frac{\sigma\sigma'}{k_*}\Omega_2\right)\mathbf{e}_3^0\right). \end{gathered} \tag{48}$$

Чтобы упростить выражение (47) для модуля бинормали, введем новую переменную χ с помощью дифференциального соотношения

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{k_* n_0 \sigma^2 - \sigma\sigma' A_0 \Omega_2}{A_0 k_* \sigma^3}, \tag{49}$$

которое позволяет записать B_* в виде

$$B_* = \frac{a_0^2\sigma^3}{\cos\chi} . \tag{50}$$

С учетом (14), переменные Ω_1, Ω_2 можно представить в виде:

$$\Omega_1 = \sigma\cos\beta, \qquad \Omega_2 = \sigma\sin\beta . \tag{51}$$

Подставив (50), (51) в (48), устанавливаем связь между опорным и полуподвижным $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ базисами

$$\begin{gathered} \text{э}_1 = -\mathbf{e}_1\sin\beta + \mathbf{e}_2^0\cos\beta, \\ \text{э}_2 = -\mathbf{e}_1\cos\beta\sin\chi - \mathbf{e}_2^0\sin\beta\sin\chi + \mathbf{e}_3^0\cos\chi, \\ \text{э}_3 = \mathbf{e}_1\cos\beta\cos\chi + \mathbf{e}_2^0\sin\beta\cos\chi + \mathbf{e}_3^0\sin\chi . \end{gathered} \tag{52}$$

Формулы обратного преобразования можно записать в виде:

$$\mathbf{e}_1 = -\mathbf{э}_1 \sin\beta - \mathbf{э}_2 \cos\beta \sin\chi + \mathbf{э}_3 \cos\beta \cos\chi\,,$$
$$\mathbf{e}_2^0 = \mathbf{э}_1 \cos\beta - \mathbf{э}_2 \sin\beta \sin\chi + \mathbf{э}_3 \sin\beta \cos\chi, \tag{53}$$
$$\mathbf{e}_3^0 = \mathbf{э}_2 \cos\chi + \mathbf{э}_3 \sin\chi\,.$$

Из соотношений (52) заключаем, что χ – это угол между $\mathbf{e}_3^0$ и $\mathbf{э}_2$, а β – угол между $\mathbf{e}_2^0$ и $\mathbf{э}_1$.

Чтобы определить угловую скорость опорного базиса, необходимо найти кривизну κ^* и кручение κ^0 [5] траектории точки O:

$$\kappa^* = \frac{B_*}{v_*^3}\,, \tag{54}$$

$$\kappa^0 = \frac{\dot{\mathbf{w}}_* \bullet \mathbf{B}_*}{B_*^2}\,. \tag{55}$$

Внесем (46), (50) в (54) и определим кривизну траектории точки O

$$\kappa^* = \frac{1}{a_0 \cos\chi}\,. \tag{56}$$

Вычислим скалярное произведение $\dot{\mathbf{w}}_* \bullet \mathbf{B}_*$, воспользовавшись соотношениями (40), (44)

$$\dot{\mathbf{w}}_* \bullet \mathbf{B}_* = B_1 \dot{w}_1 + B_2^0 \dot{w}_2^0 + B_3^0 \dot{w}_3^0 + \left(\mathbf{v}_* \times \mathbf{w}_*\right) \bullet \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{w}_*\right). \tag{57}$$

Второе слагаемое преобразуем к виду:

$$\left(\mathbf{v}_* \times \mathbf{w}_*\right) \bullet \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{w}_*\right) = \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_*\right) w_*^2 - \left(\mathbf{\Omega} \bullet \mathbf{w}_*\right)\left(\mathbf{v}_* \bullet \mathbf{w}_*\right).$$

Теперь (57) можно записать так:

$$\mathbf{B}_* \bullet \dot{\mathbf{w}}_* = B_1 \dot{w}_1 + B_2^0 \dot{w}_2^0 + B_3^0 \dot{w}_3^0 + \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_*\right) w_*^2 - \left(\mathbf{\Omega} \bullet \mathbf{w}_*\right)\left(\mathbf{v}_* \bullet \mathbf{w}_*\right).$$

Подставив в это выражение (41), (37), (39), (42), (45), получим

$$\mathbf{B}_* \bullet \dot{\mathbf{w}}_* = \frac{a_0^3 \Omega_1}{k_*}\left[\frac{\left(\sigma\sigma'\right)'}{k_*}\Omega_2 \sigma^2 - \frac{3\left(\sigma\sigma'\right)^2}{k_*}\Omega_2 + \frac{2n_0}{A_0}\sigma^3\sigma' - \Omega_3 \sigma^3 \sigma'\right]. \tag{58}$$

Уравнение (12) запишем с учетом (16)

$$\Omega_2{}' \frac{\Omega_1}{k_*} + \Omega_3\Omega_1 = \frac{n_0}{A_0}\Omega_1 . \tag{59}$$

Считая $\Omega_1 \neq 0$ (при $\Omega_1 = 0$, как следует из (16), $\theta = \text{const}$), определим Ω_3 из (59) $\Omega_3 = \dfrac{n_0}{A_0} - \dfrac{\Omega_2{}'}{k_*}$. Теперь скалярное произведение (58) можно записать в виде

$$\mathbf{B}_* \bullet \dot{\mathbf{w}}_* = \frac{a_0^3\Omega_1}{k_*^2}\left[(\sigma\sigma')'\Omega_2\sigma^2 - 3(\sigma\sigma')^2\Omega_2 + \frac{n_0}{A_0}k_*\sigma^3\sigma' + \Omega_2{}'\sigma^3\sigma'\right]. \tag{60}$$

Оказывается, что правую часть (60) можно записать так:

$$\mathbf{B}_* \bullet \dot{\mathbf{w}}_* = \frac{a_0^3\Omega_1\sigma^2}{A_0k_*^2}\left[\left(A_0\sigma\sigma'\Omega_2 - k_*n_0\sigma^2\right)' - \frac{3\sigma'}{\sigma}\left(A_0\sigma\sigma'\Omega_2 - k_*n_0\sigma^2\right)\right].$$

Кручение (55) обращается в нуль, если выражение в квадратной скобке обращается в нуль. Вариант, аналогичный рассматриваемому при $(a_0 = 0)$, уже изучен в монографии [3, с.176–180]. Поэтому будем рассматривать вариант, при котором кручение не обращается в нуль. Используя параметризацию (49), (50), получим такое выражение для кручения

$$\kappa^0 = -\frac{\dot{\chi}}{a_0\sigma} . \tag{61}$$

Угловая скорость $\mathbf{\Omega}_0$ опорного базиса [4] вычисляется по формуле:

$$\mathbf{\Omega}_0 = v_*\left(\kappa_0\mathbf{э}_1 + \kappa^*\mathbf{э}_3\right).$$

С учетом (46), (56), (61) $\mathbf{\Omega}_0$ принимает вид

$$\mathbf{\Omega}_0 = -\dot{\chi}\,\mathbf{э}_1 + \frac{\sigma}{\cos\chi}\mathbf{э}_3 . \tag{62}$$

Угловая скорость $\mathbf{\Omega}_{0*}$ тела S_0 относительно опорного базиса [4] – это разность угловых скоростей тела и опорного базиса

$$\mathbf{\Omega}_{0*} = \mathbf{\Omega}_* - \mathbf{\Omega}_0\,, \tag{63}$$

$$\mathbf{\Omega}_* = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2^0 + \frac{n_0}{J_0} \mathbf{e}_3^0\,. \tag{64}$$

Чтобы получить разложение вектора $\mathbf{\Omega}_*$ в опорном базисе, подставим в (64) соотношения (53):

$$\mathbf{\Omega}_* = \mathbf{э}_2\left(-\sigma\sin\chi + \frac{n_0}{J_0}\cos\chi\right) + \mathbf{э}_3\left(\sigma\cos\chi + \frac{n_0}{J_0}\sin\chi\right). \tag{65}$$

Теперь внесем (65), (62) в (63) и найдем угловую скорость $\mathbf{\Omega}_{0*}$:

$$\mathbf{\Omega}_{0*} = \mathbf{э}_1\dot{\chi} + \mathbf{э}_2\left(-\sigma\sin\chi + \frac{n_0}{J_0}\cos\chi\right) + \mathbf{э}_3\left(-\sigma\sin\chi + \frac{n_0}{J_0}\cos\chi\right)\mathrm{tg}\chi, \tag{66}$$

где $\Omega_{0*}^2 = \dot{\chi}^2 + \sigma^2\left(\mathrm{tg}\chi - \dfrac{n_0}{J_0\sigma}\right)^2$, а σ и $\mathrm{tg}\chi$ определены в (18), (49).

Таким образом, направляющая линия годографа тела S_0 в опорном базисе определена уравнениями

$$\Omega_{0*1} = \dot{\chi}\,, \Omega_{0*2} = -\sigma\sin\chi + \frac{n_0}{J_0}\cos\chi\,, \Omega_{0*3} = \left(-\sigma\,\mathrm{tg}\,\chi + \frac{n_0}{J_0}\right)\sin\chi\;. \tag{67}$$

Чтобы найти подвижный годограф тела S_0 необходимо вектор (63) записать в неизменно связанном с этим телом базисе $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*$.

Вектор $\mathbf{\Omega}_*$ в этом базисе имеет разложение

$$\mathbf{\Omega}_* = (\Omega_1\cos\Phi + \Omega_2\sin\Phi)\mathbf{e}_1^{0*} + (-\Omega_1\sin\Phi + \Omega_2\cos\Phi)\mathbf{e}_2^{0*} + \frac{n_0}{J_0}\mathbf{e}_3^{0*}\,.$$

Учитывая обозначения (51), представим этот вектор в виде:

$$\mathbf{\Omega}_* = \mathbf{e}_1^{0*}\sigma\cos(\Phi-\beta) - \mathbf{e}_2^{0*}\sigma\sin(\Phi-\beta) + \mathbf{e}_3^{0*}\frac{n_0}{J_0}\,. \tag{68}$$

Заданный в опорном базисе вектор (62) необходимо записать в базисе $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^{0*}$. Для этого вначале воспользуемся формулами (52) и представим вектор $\mathbf{\Omega_0}$ в полуподвижном базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$.

$$\mathbf{\Omega}_0 = \mathbf{e}_1(\dot\chi\sin\beta+\sigma\cos\beta)+\mathbf{e}_2^0(-\dot\chi\cos\beta+\sigma\sin\beta)+\mathbf{e}_3^0\sigma tg\chi. \quad (69)$$

Базисные векторы $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^{0*}$ и $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ связаны так

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^{0*}\cos\Phi-\mathbf{e}_2^{0*}\sin\Phi, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^{0*}\cos\Phi-\mathbf{e}_2^{0*}\sin\Phi, \quad \mathbf{e}_3^0 = \mathbf{e}_3^{0*}.$$

Подставив эти выражения в (69), получим

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}_0 = {} & \mathbf{e}_1^{0*}[-\dot\chi\sin(\Phi-\beta)+\sigma\cos(\Phi-\beta)] \\ & -\mathbf{e}_2^{0*}[\dot\chi\cos(\Phi-\beta)+\sigma\sin(\Phi-\beta)]+\mathbf{e}_3^{0*}\sigma\,\mathrm{tg}\chi.\end{aligned} \quad (70)$$

Внесем соотношения (68), (70) в (63) и получим разложение вектора $\mathbf{\Omega}_0-\mathbf{\Omega}_*$ в неизменно связанном с телом S_0 базисе: $\mathbf{\Omega}_0-\mathbf{\Omega}_* = q_1^*\mathbf{e}_1^{0*}+q_2^*\mathbf{e}_2^{0*}+q_3^*\mathbf{e}_3^{0*}$, где

$$q_1^* = \dot\chi\sin(\Phi-\beta),\ q_2^* = \dot\chi\cos(\Phi-\beta),\ q_3^* = \frac{n_0}{J_0}-\sigma\,\mathrm{tg}\chi. \quad (71)$$

Уравнения (71) определяют направляющую линию подвижного годографа тела S_0.

Движение тела S_0 представим качением подвижного годографа (71) по годографу (67) в опорном базисе (43), имеющем угловую скорость (62).

Для вычисления годографа тела S в опорном базисе вначале представим угловую скорость тела S

$$\mathbf{\omega}_* = \omega_1\mathbf{e}_1+\omega_2\mathbf{e}_2+\frac{n}{J}\mathbf{e}_3 \quad (72)$$

в опорном базисе. Для этого запишем соотношения, связывающие полуподвижные базисы $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ тела S и $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ тела S_0:

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2^0\cos\theta-\mathbf{e}_3^0\sin\theta,\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2^0\sin\theta+\mathbf{e}_3^0\cos\theta. \quad (73)$$

Подставив (73) в (72), получим такое разложение

$$\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \left(\omega_2 \cos\theta + \frac{n}{J} \sin\theta \right) \mathbf{e}_2^0 + \left(-\omega_2 \sin\theta + \frac{n}{J} \cos\theta \right) \mathbf{e}_3^0 . \quad (74)$$

Вносим в (74) соотношения (53), находим

$$\boldsymbol{\omega}_* = \mathbf{э}_1 \frac{1}{\sigma} \left[-\omega_1 \Omega_2 + \Omega_1 \left(\omega_2 \cos\theta + \frac{n}{J} \sin\theta \right) \right] +$$

$$+ \mathbf{э}_2 \left\{ -\frac{1}{\sigma} \left[\Omega_1 \omega_1 + \Omega_2 \left(\omega_2 \cos\theta + \frac{n}{J} \sin\theta \right) \right] \sin\chi + \left(-\omega_2 \sin\theta + \frac{n}{J} \cos\theta \right) \cos\chi \right\} +$$

$$+ \mathbf{э}_3 \left\{ \frac{1}{\sigma} \left[\Omega_1 \omega_1 + \Omega_2 \left(\omega_2 \cos\theta + \frac{n}{J} \sin\theta \right) \right] \cos\chi + \left(-\omega_2 \sin\theta + \frac{n}{J} \cos\theta \right) \sin\chi \right\}.$$

С учетом (8)–(10), (51) этот вектор принимает вид:

$$\boldsymbol{\omega}_* = \mathbf{э}_1 \left(\frac{A}{J} - 1 \right) \frac{n}{A} \cos\beta \sin\theta + \quad (75)$$

$$+ \mathbf{э}_2 \left\{ \left[\frac{A_0}{A} \sigma - \left(\frac{A}{J} - 1 \right) \frac{n}{A} \sin\beta \sin\theta \right] \sin\chi + \left[-\frac{n_0}{A} + \left(\frac{A}{J} - 1 \right) \frac{n}{A} \cos\theta \right] \cos\chi \right\} +$$

$$+ \mathbf{э}_3 \left\{ \left[-\frac{A_0}{A} \sigma + \left(\frac{A}{J} - 1 \right) \frac{n}{A} \sin\beta \sin\theta \right] \cos\chi + \left[-\frac{n_0}{A} + \left(\frac{A}{J} - 1 \right) \frac{n}{A} \cos\theta \right] \sin\chi \right\}.$$

Тело S имеет по отношению к опорному базису угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_{0*}$, равную разности $\boldsymbol{\omega}_{0*} = \boldsymbol{\omega}_* - \boldsymbol{\Omega}_0$. Разложение этого вектора в опорном базисе получим, воспользовавшись соотношениями (75), (62):

$$\boldsymbol{\omega}_{0*} = \mathbf{э}_1 \left[\dot{\chi} + \left(\frac{A}{J} - 1 \right) \frac{n}{A} \cos\beta \sin\theta \right] + \quad (76)$$

$$+ \mathbf{э}_2 \left\{ -\left[-\frac{A_0}{A} \sigma + \left(\frac{A}{J} - 1 \right) \frac{n}{A} \sin\beta \sin\theta \right] \sin\chi + \left[-\frac{n_0}{A} + \left(\frac{A}{J} - 1 \right) \frac{n}{A} \cos\theta \right] \cos\chi \right\} +$$

$$+ \mathbf{э}_3 \left\{ \left[-\frac{A_0}{A} \sigma + \left(\frac{A}{J} - 1 \right) \frac{n}{A} \sin\beta \sin\theta \right] \cos\chi + \left[-\frac{n_0}{A} + \left(\frac{A}{J} - 1 \right) \frac{n}{A} \cos\theta \right] \sin\chi - \frac{\sigma}{\cos\chi} \right\}.$$

Уравнения (76) определяют направляющую линию годографа тела S в опорном базисе. Для нахождения неподвижного годографа тела S необходимо представить вектор

$$\boldsymbol{\omega}_* - \boldsymbol{\Omega}_0 \quad (77)$$

в неизменно связанном с телом S базисе $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*$.

Из (73) имеем $\mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_2\cos\theta + \mathbf{e}_3\sin\theta$, $\mathbf{e}_3^0 = -\mathbf{e}_2\sin\theta + \mathbf{e}_3\cos\theta$.

Подставив эти выражения в (52) установим связь между опорным и полуподвижным базисами:

$$\begin{gathered}
\text{э}_1 = -\mathbf{e}_1\sin\beta + \mathbf{e}_2\cos\beta\cos\theta + \mathbf{e}_3\cos\beta\sin\theta, \\
\text{э}_2 = -\mathbf{e}_1\cos\beta\sin\chi - \mathbf{e}_2(\sin\beta\cos\theta\sin\chi + \sin\theta\cos\chi) + \\
+\mathbf{e}_3(-\sin\beta\sin\theta\sin\chi + \cos\theta\cos\chi), \\
\text{э}_3 = \mathbf{e}_1\cos\beta\cos\chi + \mathbf{e}_2(\sin\beta\cos\theta\cos\chi - \sin\theta\sin\chi) + \\
+\mathbf{e}_3(\sin\beta\sin\theta\cos\chi + \cos\theta\sin\chi).
\end{gathered}$$

Вносим полученные выражения в (62) и находим

$$\begin{gathered}
\mathbf{\Omega}_0 = \mathbf{e}_1(\dot\chi\sin\beta + \sigma\cos\beta) + \mathbf{e}_2(-\dot\chi\cos\beta\cos\theta + \sigma(\sin\beta\cos\theta - \sin\theta\,\mathrm{tg}\chi)) + \\
+\mathbf{e}_3(-\dot\chi\cos\beta\sin\theta + \sigma(\sin\beta\sin\theta + \cos\theta\,\mathrm{tg}\chi)). \qquad (78)
\end{gathered}$$

Запишем вектор (72) с учетом (8), (9), (51) в виде

$$\boldsymbol{\omega}_* = -\mathbf{e}_1\frac{A}{A_0}\sigma\cos\beta + \mathbf{e}_2\frac{n_0 + n\cos\theta}{A\sin\theta} + \mathbf{e}_3\frac{n}{J}. \qquad (79)$$

Вычитая (78) из (79), находим представление вектора (77) в базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$:

$$\boldsymbol{\omega}_* - \mathbf{\Omega}_0 = M_1\mathbf{e}_1 + M_2\mathbf{e}_2 + M_3\mathbf{e}_3, \qquad (80)$$

где

$$\begin{gathered}
M_1 = -\dot\chi\sin\beta - (1 + \frac{A_0}{A})\sigma\cos\beta, \\
M_2 = \dot\chi\cos\beta\cos\theta - \sigma(\sin\beta\cos\theta - \sin\theta\,\mathrm{tg}\chi) + \frac{n_0 + n\cos\theta}{A\sin\theta}, \qquad (81) \\
M_3 = \dot\chi\cos\beta\sin\theta - \sigma(\sin\beta\sin\theta + \cos\theta\,\mathrm{tg}\chi) + \frac{n}{J}.
\end{gathered}$$

Неизменно связанный с телом S базис $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*$ связан с базисом $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ соотношениями (32), из которых находим

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^*\cos\varphi - \mathbf{e}_2^*\sin\varphi,\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1^*\sin\varphi + \mathbf{e}_2^*\cos\varphi,\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^*.$$

Внесем эти выражения в (80), получим разложение вектора (77) в базисе $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*$:

$$\theta_1 - \Theta_0 = M_1\mathbf{e}_1^* + M_2\mathbf{e}_2^* + M_3\mathbf{e}_3^*,$$

$$M_1^* = M_1\cos\varphi + M_2\sin\varphi,\ M_2^* = -M_1\sin\varphi + M_2\cos\varphi,\ M_3^* = M_3.$$

где

$$M_1^* = (-\dot\chi\sin\beta - (1+\frac{A_0}{A})\sigma\cos\beta)\cos\varphi +$$

$$+(\dot\chi\cos\beta\cos\theta - \sigma(\sin\beta\cos\theta - \sin\theta\,\mathrm{tg}\chi) + \frac{n_0 + n\cos\theta}{A\sin\theta})\sin\varphi,$$

$$M_2^* = (\dot\chi\sin\beta + (1+\frac{A_0}{A})\sigma\cos\beta)\sin\varphi + \qquad (82)$$

$$+(\dot\chi\cos\beta\cos\theta - \sigma(\sin\beta\cos\theta - \sin\theta\,\mathrm{tg}\chi) + \frac{n_0 + n\cos\theta}{A\sin\theta})\cos\varphi,$$

$$M_3^* = \dot\chi\cos\beta\sin\theta - \sigma(\sin\beta\sin\theta + \cos\theta\,\mathrm{tg}\chi) + \frac{n}{J}$$

(здесь угол φ определен соотношением (31)).

Движение тела S сопровождается качением подвижного годографа (82) по годографу (76) в опорном базисе.

Впервые в задаче о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа записаны годографы тел в опорном базисе. Это дает возможность представить движение тел качением подвижного годографа по годографу в опорном базисе.

Литература

1. Харламов П.В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – 28. – №3. – С. 502–507.
2. Харламов М.П., Харламов П.В. Построение полного решения задачи об относительном движении тела // Докл. АН УССР. – 1983. – Сер. А. – №12. – С. 36–38.
3. Лесина М.Е. Точные решения двух новых задач аналитической динамики системы сочлененных тел. Донецк: ДонГТУ, 1996. – 238 с.
4. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
5. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 428 с.