УДК 531.38

Оптимальный синтез управления для двумерной цепной неголономной системы

Прокопенко Н.А.
Донецкий национальный технический университет

Рассматривается задача оптимального синтеза двухмерной цепной неголономной системы. Для ее решения классического принципа максимума Понтрягина недостаточно, так как возникает неопределенность на кривых переключения. Поэтому задача оптимального синтеза решается с использованием теории разрывных систем. Данная задача была сформулирована Ройтенбергом. Также им было получено программное управление. В статье найдена функция, которая осуществляет оптимальный синтез двухмерной цепной неголономной системы.

1.Постановка задачи.

Рассмотрим управляемый объект, движение которого описывается цепной неголономной системой [1],имеющей вид

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = U_1 \\ &\dot{x}_2 = U_2 \\ &\dot{x}_i = x_{i-1}U_1, i = 1,2,3,\ldots,n \end{aligned} \qquad (1)$$

с ограничениями

$$|U_i| \le 1, i = 1,2 \qquad (2)$$

Для данного объекта ставится задача оптимального быстродействия в случае, когда конечным положением служит точка (0,0). Задача синтеза для данного объекта будет состоять в отыскании синтезирующей функции V(x), заданной в фазовом пространстве, что позволит определять параметры управления в зависимости от координат фазового пространства для оптимального движения объекта в условиях поставленной задачи быстродействия.

Частным случаем этой задачи является пример Ройтенберга: задача оптимального быстродействия для системы вида

$$\begin{aligned} &\dot{x}_2 = U_2 \\ &\dot{x}_3 = x_2U_1 \end{aligned} \qquad (3)$$

с ограничениями (2)

2.Пример Ройтенберга.

Для решения задачи оптимального быстродействия в качестве необходимого условия используется принцип максимума Понтрягина [2].Функция Н в этом случае принимает вид

$$H = p_2U_2 + p_3x_2U_1 \qquad (4)$$

Система для вспомогательных переменных такова: $\dot{p}_2 = -p_3 U_1,\ \dot{p}_3 = 0$,
а ее решение:

$p_2 = c_2 - c_3 U_1 t,\ p_3 = c_3$,где $c_2, c_3 \in R$

Далее в силу соотношения максимума, мы находим, учитывая (4) и (3), управления "подозрительные" на оптимальность

$$U_1 = sign(c_3 x_2), U_2 = sign(c_2 - c_3 U_1 t), c_2 \neq 0, c_3 \neq 0 \qquad (5)$$

$$U_2 = sign(c_2), |U_1| \leq 1 \qquad (6)$$

Из (6) видно, что в фазовой плоскости есть области, где неопределен управляющий параметр U_1. Данные области назовем областями неодназначности. Определим их.

Пусть $U_2 = 1$, тогда система имеет вид

$$\dot{x}_2 = 1, \dot{x}_3 = x_2 U_1, |U_1| \leq 1 \qquad (7)$$

Из первого уравнения системы(7) получим

$$\begin{aligned} &dx_2 = dt \succ 0 \\ &x_2 \prec 0, \end{aligned} \qquad (8)$$

учитывая, что конечным положением является точка(0,0).

Разделив, соответственно, левые и правые части первого и второго уравнений системы (7), оценив U_1 из (2) и проинтегрировав полученное, имеем неравенство

$$|x_3| \leq 0.5 x_2^2 \qquad (9)$$

Можем сделать вывод: если $U_2 = 1$ область неоднозначности описывается неравенствами (8) и (9).

Рассуждая аналогичным образом, получим, что если $U_2 = -1$ область неоднозначности описывается неравенствами (9) и

$$x_2 \succ 0 \qquad (10)$$

Далее определим области однозначности. Для этого рассмотрим (5).Пусть в (5) $U_1 = 1$, тогда $U_2 = sign(c_2 - c_3 t), c_2, c_3 \in R$ и $c_3 x_2 \succ 0$. Решая это неравенство получим: если $x_2 \succ 0$, то $c_3 \succ 0$, а U_2 меняет значение с 1 на -1 ; если же $x_2 \prec 0$, то $c_3 \prec 0$, а U_2 меняет значение с -1 на 1.

Пусть в (5) $U_1 = -1$, тогда $U_2 = sign(c_2 + c_3 t), c_2, c_3 \in R$ и $c_3 x_2 \prec 0$. Решая это неравенство получим: если $x_2 \succ 0$, то $c_3 \prec 0$, а U_2 меняет значение с 1 на -1; если же $x_2 \prec 0$, то $c_3 \succ 0$, а U_2 меняет значение с -1 на 1

Из вида системы (4) при U_1, U_2, принимающих значения 1 и -1,определили вид фазовых траекторий: $x_3 = \pm 0.5 x_2^2 + c, c \in R$. Причем "+" при $U_2 U_1 \succ 0$, "-" при $U_2 U_1 \prec 0$. В начало координат ведут параболы вида $x_3 = \pm 0.5 x_2^2$. Исходя из вида фазовых траекторий и полученных областей однозначности имеем: фазовые траектории движения данного объекта в областях однозначности состоят из двух кусков парабол, один из которых проходит через начало координат. Это области V_3, V_4, V_5, V_6.

$$V_3 = \{x_3 \succ 0.5 x_2^2, x_2 \prec 0\}; V_4 = \{x_3 \succ 0.5 x_2^2, x_2 \succ 0\}$$
$$V_5 = \{x_3 \prec -0.5 x_2^2, x_2 \prec 0\}; V_6 = \{x_3 \prec -0.5 x_2^2, x_2 \succ 0\} \quad (10)$$

Очевидно, что в качестве кривых переключения мы можем взять параболы, ведущие в начало координат, так как они разделяют области однозначности и неоднозначности и содержат точку (0,0). В областях $V_3 - V_6$ движение уже было описано.

В областях же неоднозначности

$$V_1 = \{-0.5 x_2^2 \prec x_3 \prec 0.5 x_2^2, x_2 \prec 0\}; V_2 = \{-0.5 x_2^2 \prec x_3 \prec 0.5 x_2^2, x_2 \succ 0\}$$

выберем управляющий параметр U_1 так, чтобы фазовые траектории были симметричны.

Данное программное управление описывается функцией $V(x) = (V^1(x), V^2(x))$ (11), где

$$V^1 = \begin{cases} 1, x \in V_3, V_6, \sigma_2, \sigma_4 \\ -1, x \in V_1, V_2, V_4, V_5, \sigma_1, \sigma_3 \end{cases},$$

$$V^2 = \begin{cases} 1, x \in V_1, V_4, V_6, \sigma_3, \sigma_2 \\ -1, x \in V_2, V_3, V_5, \sigma_1, \sigma_4 \end{cases}. \quad (11)$$

$$\sigma_2 = \left\{x_3 = 0.5 x_2^2, x_2 \prec 0\right\} \sigma_4 = \left\{x_3 = -0.5 x_2^2, x_2 \succ 0\right\}$$
$$\sigma_1 = \left\{x_3 = 0.5 x_2^2, x_2 \succ 0\right\} \sigma_3 = \left\{x_3 = -0.5 x_2^2, x_2 \prec 0\right\} \quad (12)$$

Получили функцию, описывающую программное управление. Она является функцией фазовой плоскости. В связи с этим возник вопрос: можно ли полученную функцию определить как синтезирующую. Для ответа на этот вопрос необходимо определить скорость движения на кривых переключения. В связи с этим воспользуемся доопределением скорости движения по кривой скольжения для систем с разрывной правой частью [3].

Выбранное доопределение объясняется тем, что $V(x) = (V^1(x), V^2(x))$ кусочно-постоянная Функция и при подстановке ее в систему (4) получим систему с разрывной правой частью.

Разрыв функция $V(x)$ терпит на кривых переключения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$.

Определим скорость на кривой σ_1. Пусть f^+-это транспонированный вектор скорости движения над кривой σ_1 в области V_4,а f^-- это транспонированный вектор скорости движения под кривой σ_1 в области V_2, f^0 - транспонированный вектор скорости движения по кривой σ_1.

$$f^+ = (-x_2, 1),\ f^- = (-x_2, -1), \Phi = x_3 - 0.5x_2^2 = 0, \Delta\Phi = (1, -x_2)$$

$$\alpha = \frac{\Delta\Phi f^-}{\Delta\Phi\left(f^- - f^+\right)}$$

$$f^0 = \alpha f^+ + (1-\alpha) f^- \tag{13}$$

$\alpha = 0,\ f^0 = f^-$.Определим скорость на кривой σ_3 по формулам (13).

$$f^+ = (-x_2, 1),\ f^- = (-x_2, -1), \Phi = x_3 + 0.5x_2^2 = 0, \Delta\Phi = (1, x_2).$$

$$\alpha = 1,\ f^0 = f^+$$

Проведя аналогичные вычисления для кривых σ_2 и σ_4, получили скорости скольжения равные нулю. То есть объект останавливается, попадая на данные кривые, что не возможно при синтезе оптимального управления.

Полученный результат позволяет сделать вывод, что функция $V(x)$ не является синтезирующей. Но в виду того, что области V_1, V_2 неоднозначны относительно управляющего параметра U_1, мы можем доопределить скорости движения в этих областях, исходя из известного вида скорости скольжения по σ_2 и σ_4, и тем самым переопределить функцию $V(x)$.

Доопределение скорости движения в областях V_1, V_2 производится следующим образом.

Рассмотрим кривую σ_4 (для σ_2 рассуждения аналогичные).

$$f^{+}=\left(U_1x_2,-1\right),\ f^{-}=\left(x_2,1\right),\Phi=x_3+0.5x_2^2=0,\Delta\Phi=\left(1,x_2\right)$$

$$\alpha=\frac{2}{3-U_1},\ f^{0}=\frac{x_2\left(1+U_1\right)}{3-U_1}-\frac{1+U_1}{3-U_1}$$

При движении по σ_4, f^0 имеет вид $f^0=\left(ax_2,-a\right), a\succ 0$. Для определения U_1, поставим следующие условия для параметров α и a из [3]: $0\prec\alpha\prec 1, a\succ 0$. Очевидно, что эти условия выполняются для всех $\left|U_1\right|\leq 1$. Пусть $U_1=-0.5$. Данное значение не противоречит движению объекта по кривой σ_1. Получили: в области V_2 $U_2=-1, U_1=-0.5$, в области V_1 на кривой σ_2 нами получены следующие параметры управления движением: $U_2=1, U_1=-0.5$. Данное значение не противоречит движению объекта по σ_3.Полученное управление после доопределения скорости движения в областях неоднозначности будет описываться функцией $\tilde{V}=(\tilde{V}_1,\tilde{V}_2)$,где

$$\tilde{V}_1(x)=\begin{cases}1, x\in V_3,V_6,\\ -1, x\in V_4,V_5,\\ -0.5, x\in V_1,V_2,\\ -\frac{1}{7}, x\in\sigma_3,\\ \frac{1}{7}, x\in\sigma_4,\\ -\frac{3}{5}, x\in\sigma_1,\\ \frac{3}{5}, x\in\sigma_2,\end{cases}\qquad \tilde{V}_2(x)=\begin{cases}1, x\in V_1,V_6,V_4,\\ -1, x\in V_2,V_5,V_3,\\ -\frac{1}{7}, x\in\sigma_4,\\ \frac{1}{7}, x\in\sigma_3,\\ -\frac{3}{5}, x\in\sigma_1,\\ \frac{3}{5}, x\in\sigma_2.\end{cases}$$

Данные фазовые траектории удовлетворяют принципу максимума. Но являются ли они оптимальными? Покажем это. Для этого рассмотрим отдельно области однозначности и неоднозначности.

Фазовые траектории в областях однозначности V_3,V_4,V_5,V_6 оптимальны, так как это единственные фазовые траектории, удовлетворяющие принципу максимума в этих областях. В областях неоднозначности V_1,V_2 отметим, что для фазовых траекторий, удовлетворяющих принципу максимума, время движения зависит от управляющего параметра U_2. Он в V_1,V_2 постоянен и равен соответственно 1 и -1. Следовательно, время будет одинаковое для всех траекторий, удовлетворяющих принципу максимума в этих областях. То есть выделенные нами фазовые траектории будут оптимальны в смысле быстродействия. В виду того, что траектории движения объекта оптимальны и функция $\tilde{V}(x)$ является решением уравнения (4), (2) и принимает допустимые значения, можно сделать следующий вывод: $\tilde{V}(x)$ - синтезирующая функция, определяющая оптимальный синтез для данного объекта.

В дальнейшем предполагается распространить приведённый метод на трёхмерную цепную неголономную систему.

Литература

1. Sordalen O.J. Egeland O. Exponential stabilization of nonholonomic chained systems/IEEE Transactions on automatic control.-1995.-40,N.1.-C.35-49.\\
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления.-М.:Наука, 1969.-408 с.\\
3. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.-М:Наука, 1985.-224 с.\\