УДК 51(071)

Получение плотности вероятности системы зависимых, нормально распределенных величин

Ехилевский С.Г., Вилкова И.В.
Донецкий национальный технический университет

В роботі запропоновано строгий та гранічно лаконічний спосіб узагальнення нормального закону на випадок системи залежних величин. Викладки значно спрощуються завдяки тому, що частинна похідна диференціальної функції розподілу дорівнює нулю в точці математичного сподівання. З цього легко випливає пряма лінія регресії, а отже й явна форма параметрів умовного розподілу.

Дифференциальная функция распределения системы независимых, нормально распределенных величин получается умножением одномерных плотностей вероятности

$$\mathbf{f}(\xi,\eta) = \mathbf{f}_1(\xi) * \mathbf{f}_2(\eta) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\,\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\xi-m_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(\eta-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

где смысл всех параметров обычный и в дополнительных пояснениях не нуждается. Из условия **f (x, y) = Const** получим, что линиями равной вероятности являются эллипсы с осями, параллельными $\mathbf{O}\xi$ и $\mathbf{O}\eta$.

Линейным преобразованием можно перейти в систему координат **Oxy**, где оси эллипсов будут расположены с некоторым наклоном. При этом в показателе экспоненты возникнут члены вида x y, что не позволит представить функцию распределения в факторизованном виде. Значит, новые координаты являются возможными значениями зависимых случайных величин. Их система по прежнему распределена нормально, т.к. «график» плотности вероятности инвариантен относительно поворотов системы координат. Это значит, что максимум **f** при фиксированном **x** достигается в точке **y**, равной условному матожиданию $\mathbf{m}_y(\mathbf{x})$. Из необходимого условия экстремума

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \eta} * \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \xi} * \frac{\partial \xi}{\partial y} \sim \frac{(\xi - m_1)}{\sigma_1^2} * \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{(\eta - m_2)}{\sigma_2^2} * \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

и линейности преобразования поворота следует, что линия регрессии **Y** на **X** – прямая. Это позволяет связать параметры условного распределения с коэффициентом корреляции r_{xy}

$$\mathbf{m}_y(\mathbf{x}) = \mathbf{m}_y + \mathbf{r}_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_x),$$

$$\sigma_y(x) = \sigma_y\sqrt{1 - r_{xy}^2}\ ,$$

а значит, и записать соответствующую плотность вероятности

$$\mathbf{f(y/x)} = \frac{1}{2\pi\sigma_y(x)} e^{-\frac{(y - m_y(X))^2}{2\sigma_y^2(x)}}\ ,$$

зная которую, легко решить задачу, вынесенную в заголовок

f(x,y)=f $_1$ **(x) f(y/x)=**

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1 - r_{xy}^2}} * e^{-\frac{1}{2(1 - r_{xy}^2)}\left[\frac{(y - m_y)^2}{\sigma_y^2} - 2r_{xy}\frac{(x - m_x)(y - m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(x - m_x)^2}{\sigma_x^2}\right]}.$$

Действуя по аналогии, последний результат можно обобщить на случай трех и большего числа случайных величин.

Литература

1. Логинов Э.А. Математическая статистика. М. Изд – во МИСИ, 1977г.,93с.
2. Методические указания к выполнению семестрового индивидуального задания по математической статистике / Сост.: Ю.Ф. Косолапов, Н.Г. Плаксина. – Донецк: ДПИ, 1989. – 48 с.