УДК 517.944(09)

Характеристическая задача в работах Пикара. Проблема обоснования метода

Косолапов Ю.Ф., Константинова А.О., Хорунжая О.И.

Донецкий национальный технический университет

В статті піддається ґрунтовному аналізу спроба Пікара довести законність методу послідовних наближень для випадку характеристичної задачі для лінійного гіперболічного диференціального рівняння другого порядку з двома незалежними змінними і змінними коефіцієнтами. Доводиться надзвичайно далеко захована помилковість пікаріських міркувать.

В предыдущей статье мы изучали два варианта доказательства Пикаром законности метода последовательных приближений для решения характеристической задачи для линейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными и переменными коэффициентами. Первый вариант не вызывает возражений, так как основывается на рассуждениях, успешно осуществленных Пикаром в случае задачи Коши для такого же уравнения. Что касается второго варианта доказательства, то он связан с применением теории аналитических функций и является чрезвычайно интересным с научной точки зрения. Однако в рассуждениях Пикара нам, как представляется, удалось найти ошибку, настолько далеко спрятанную, что для ее обнаружения потребовалось провести очень скрупулезные исследования с выходом, в том числе, в теорию двойных рядов. Для удобства мы продолжаем нумерацию формул, начатую в предыдущей статье.

Итак, нам предстоит выяснить, удалось ли Пикару при решении задачи (16)

$$\left.\begin{aligned} U_{xy} &= k\left(U_x + U_y + U\right), \\ U\left(x_0, y\right) &= 0, U\left(x, y_0\right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

установить не только разложимость решения в ряд (15), по степеням k (с коэффициентами, зависящими от переменных x, y), но и равномерную сходимость (по x и y) его, а также рядов (17).

Полагая

$$U = e^{k(x+y)}v, \qquad (18)$$

Пикар от задачи (16) переходит к аналогичной задаче

$$\left.\begin{aligned} v_{xy} &= \left(k^2+k\right)v + Me^{-k(x+y)}, \\ v(x_0,y) &= 0,\ v(x,y_0)=0, \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

и применяет к ней свой излюбленный итерационный метод

$$\left(v_0\right)_{xy} = Me^{-k(x+y)},\ \left(v_n\right)_{xy} = \left(k^2+k\right)v_{n-1},\ n=1,2,...,$$
$$v_n(x_0,y)=0,\ v_n(x,y_0)=0,\ n=0,1,2,...$$

Если задать произвольный, но ограниченный отрезок $\left[-k_0,k_0\right]$ значений k и ввести обозначение $N=\max\left|v_0\right|$ при $(x,y)\in R,\ k\in\left[-k_0,k_0\right]$, легко с помощью формулы (8) получить оценки (будем для простоты вместе с Пикаром считать $x_0=y_0=0$)

$$\left|v_n\right| \le N\frac{\left[\left(k^2+k\right)xy\right]^n}{(n!)^2},\ \left|\left(v_n\right)_x\right| \le N\frac{\left[\left(k^2+k\right)y\right]^n}{n!},\ \left|\left(v_n\right)_x\right| \le N\frac{\left[\left(k^2+k\right)x\right]^n}{n!}.$$

Они, очевидно, устанавливают равномерную относительно x,y,k $\left((x,y)\in R\right),$ $k\in\left[-k_0,k_0\right])$ сходимость рядов

$$\sum_0^\infty v_n \qquad (20)$$

$$\sum_0^\infty \left(v_n\right)_x, \qquad \sum_0^\infty \left(v_n\right)_y, \qquad (21)$$

следовательно - разрешимость задачи (19), а на основании (18) - и задачи (16).

Пикар считает свое доказательство исчерпанным: каждый из членов рядов (20),(21) заявляет он, является голоморфной функцией от k, и ряды сходятся равномерно, каким бы ни было k «в произвольной конечной области плоскости этого переменного»[1]; интеграл v задачи (19) (сумма ряда (20)), а следовательно, и решение задачи (16), а также производные U_x,U_y являются целыми функциями от k, то есть представляются рядами (15), (17) с бесконечным (относительно k) радиусом сходимости, что (по Пикару) и требовалось доказать.

Но можно ли считать доказательство Пикара, даже если оставить в стороне игнорирование им вопроса о непрерывном примыкании решения к

[1] «...dans un domaine fini quelqonque du plan de cette variable» (стр. 358). Как видим, Пикар допускает даже комплексные значения k. Мы, как и раньше, предполагаем, что k - вещественно и что $k\in\left[-k_0,k_0\right]$, где k_0 - произвольно.

заданным на характеристиках функциям, достаточно полным и строгим? Сейчас мы увидим, что нельзя.

Каждая функция v_n ($n = 0,1,2,...$) действительно разлагается в ряд по степеням k. Можно даже доказать, что все эти ряды сходятся абсолютно и равномерно относительно x, y, k для $(x, y) \in R, k \in [-k_0, k_0]$ при любом k_0. Рассмотрим, например, функцию v_0. На основании формулы (8) (в том же предположении x_0= = y_0 = 0) имеем:

$$v_0(x, y, k) = \int_0^x \int_0^y M e^{-k(x+y)} dx dy = \frac{M}{k^2}\left(1 - e^{-kx}\right)\left(1 - e^{-ky}\right) =$$

$$= M \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i!} k^{i-1} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{y^j}{j!} k^{j-1} = M \sum_{i,j=1}^{\infty} (-1)^{i+j} \frac{x^i y^j}{i!\, j!} k^{i+j-2}$$

Здесь двойной ряд представлен в виде произведения двух абсолютно сходящихся к

$$\frac{1}{k}\left(1 - e^{-kx}\right), \quad \frac{1}{k}\left(1 - e^{-ky}\right)$$

соответственно рядов и поэтому абсолютно сходится к функции

$$\frac{1}{k^2}\left(1 - e^{-kx}\right)\left(1 - e^{-ky}\right)$$

на множестве

$$A = \{(x, y, k) : -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < k < \infty\}$$

в частности, на замкнутом ограниченном множестве

$$B = \{(x, y, k) : (x, y) \in R,\ k \in [-k_0, k_0]\}.$$

Ввиду равномерной сходимости рядов-сомножителей на множествах

$$B_1 = \{(x, k) : x \in [0, x_B], k \in [-k_0, k_0]\}, \quad B_2 = \{(y, k) : y \in [0, y_B], k \in [-k_0, k_0]\}$$

соответственно двойной ряд, как нетрудно заметить, сходится равномерно (и, конечно, абсолютно) на B. Находя теперь последовательно $v_1, v_2, ...$ с помощью формулы (8) и используя соответствующие теоремы о почленном интегрировании степенных рядов, убеждаемся в равномерной и абсолютной сходимости на R всех рядов, являющихся разложениями функций v_n ($n = 0,1,2,...$). Абсолютная сходимость позволяет путем перегруппировки слагаемых получить разложения для v_n в виде степенных рядов относительно k (с коэффициентами, зависящими от x, y)

$$v_n = M\sum_{i=n}^{\infty} P_{n,n+i+2}(x,y)k^i \ , \qquad (22)$$

где $P_{n,n+i+2}(x,y)$ - многочлен степени $n+i+2$. Например, для функции v_0 (при $n=0$)

$$P_{0,i+2} = (-1)^i \sum_{j=1}^{i+1} \frac{x^j y^{i-j+2}}{j!(i-j+2)!}.$$

Ряд (22) сходится абсолютно и равномерно на множестве B , что и утверждалось. При этом он из двойного превратился в обычный с многочленами растущих степеней от x, y в качестве коэффициентов при степенях k.

Функция v, то есть решение задачи (19), определенное рядом (20), на основании формулы (22) изображается повторным рядом

$$v = M\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=n}^{\infty} P_{n,n+i+2}k^i \qquad (23)$$

и, если мы желаем установить ее разложимость по степеням k, необходимо от (23) перейти к ряду

$$v = \sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{s} P_{i,s+i+2}\right)k^s = \sum_{s=0}^{\infty} Q_{2s+2}k^s \ , \qquad (24)$$

но это сопряжено с изменением порядка слагаемых в ряде (23), что, естественно, требует обоснования. А оно-то у Пикара и отсутствует. В частности, Пикар даже не пытается исследовать ряд (24) на абсолютную сходимость, обеспечивающую справедливость переместительного свойства. Без достаточно глубокого изучения свойств функций v_n нельзя доказать даже сходимость, не говоря уже о равномерной сходимости (относительно x, y, k), ряда (24).Это кажется удивительным, если учесть абсолютную и равномерную сходимость рядов (20)[2], (22), но тем не менее это так. В частности, из сходимости рядов (22) и (20) следует сходимость ряда (23), однако их абсолютная сходимость такой же сходимости ряду (23) не обеспечивает, так как модуль суммы ряда (22) и сумма ряда из модулей его членов здесь не одно и то же ввиду того, что многочлены $P_{n,n+i+2}$ могут принимать отрицательные значения.

Итак, Пикар не доказал не только равномерную сходимость ряда (24) на множестве B, которая только и обеспечила бы в конечном итоге требуемую им равномерную сходимость рядов (15), (17), но даже обычную сходимость.

---

[2] Все члены ряда (20) неотрицательны.

Более того, если бы Пикару даже удалось установить справедливость разложения (24) для всех k и всех $(x, y) \in R$, он бы не достиг желаемой цели. В самом деле, как говорилось выше, ряд (24) сходился бы равномерно относительно $k \in [-k_0, k_0]$ для любого k_0, но совсем не обязан был бы сходиться в B равномерно. Сказанное тем более относится к рядам, получаемым из (24) почленным дифференцированием по x или y.

Таким образом, следует признать, что путь доказательства разрешимости характеристической задачи (1), (2), избранный Пикаром в заметке [4], оказался нереализованным.

Представляет интерес вопрос, чем вызван отказ Пикара от метода, использованного в статье [3]. Нежеланием повторяться? Тогда можно было бы вообще не заниматься линейным случаем, сославшись на более раннюю работу и указав, каким образом следует исправить допущенные там незначительные неточности. Нам кажется, что на выбор Пикаром метода доказательства повлияли некоторые другие (и не только его собственные) исследования. Дело в том, что к моменту опубликования книги [2] вышло в свет несколько работ Шварца, Пикара и Пуанкаре, посвященных проблемам разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных). В них использовались идеи и методы теории аналитических функций, в том числе исследовались разложения искомых функций по степеням некоторого параметра. Эти работы в дальнейшем получили большое развитие в трудах Пуанкаре и В.А. Стеклова и, в частности, привели к обоснованию Стекловым метода разделения переменных для довольно широкого класса уравнений. Не исключено поэтому, что на заре возникновения интересного и казавшегося весьма перспективным нового направления теории Пикар искал различные сферы приложения соответствующего аппарата.

Отметим, что равномерную сходимость рядов (12) можно было бы доказать вообще без перехода к новой задаче, производя оценки их членов (с использованием формулы (8)) тем же методом, который Пикар использовал в статье [3].

В дальнейших статьях мы рассмотрим несколько других типов краевых задач для гиперболических уравнений и ряд вопросов общетеоретического характера, затронутых в работах Пикара.

Литература

1. Bois Reymond P. du. Über lineare partielle Differentialgleichu-gen zweiter Ordnung. – Journ. für ... Mathem., 1889, **104**, 241 – 301.

2. Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces... Part 2, Paris, 1889, 71 – 98.

3. Picard E. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées par-tielles et la méthode des approximations successives. – Journ. de math., 1890, (4)6, 145 – 210.

4. Picard E. Sur les méthodes d’approximations successives... – Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces... Part 4, Paris, 1896, 353 – 367.

5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М.: Наука, 1969, 800 с.