УДК 531.38

Решение задачи о движении по инерции двух гиростатов Сретенского

М.Е. Лесина, А.П. Харламов

Донецкий национальный технический университет

У роботі [4] узагальнена постановка задачі, яка вивчалася в [3]. Розглянута сукупність двох гіростатів, зчленованих ідеальним сферичним шарніром O, в якому є пружний елемент, що суміщає осі CO і C_0O цих гіростатів, які ортогональні круговим перетинам відповідних гіраційних еліпсоїдів.

Співвідношення (1.11) роботи [3] тут повинні бути замінені рівняннями (31), (24), (25) роботи [4]. Усі інші побудови роботи [3] поширюються із залученням цих рівнянь на систему гіростатів Сретенського, і, значить, всі розв'язання рівнянь руху, одержані в [1], [3] для гіроскопів Лагранжа, безпосередньо узагальнюються на задачу про систему гіростатів. Відмінності з'являються лише під час побудови рухомих аксоїдів.

Исходные соотношения. В работе [3] получено решение задачи о движении системы двух гироскопов Лагранжа

$$\Omega_1 = -\omega_1 = \tau^\bullet , \tag{1}$$

$$\Omega_2 = \omega_2 = \left(g_0 - b\tilde{n}\sin\tau\right)/\cos\tau , \tag{2}$$

$$\Omega_3 = -\omega_3 = -\omega_2 tg\,\tau , \tag{3}$$

$$\dot{\tau} = \sqrt{\frac{h - \Pi(\tau) - (A-N)\left(g_0 - b\tilde{n}\sin\tau\right)^2/\cos^2\tau}{A + N\cos 2\tau}} , \tag{4}$$

где

$$g_0 = g/2(A-N), \quad b = J/(A-N), \quad \tilde{n} = n/J . \tag{5}$$

Решение (1)-(4) получено при условиях

$$A = A_0 , \quad n_0 = -n , \tag{6}$$

а функция $\Pi(\tau)$ оставалась произвольной. Для системы двух гиростатов Сретенского зависимость φ и Φ от τ определим из уравнений (31), (24), (25) работы [4]

$$\varphi^\bullet = \tilde{k} + \beta\left(\omega_1\cos\varphi + \omega_2\sin\varphi\right) - \omega_3 , \tag{7}$$

$$\Phi^\bullet = \tilde{k}_0 + \beta_0\left(\Omega_1\cos\Phi + \Omega_2\sin\Phi\right) - \Omega_3 . \tag{8}$$

При дополнительных условиях

$$\tilde{k}_0 - \tilde{k} , \quad \beta_0 = \beta , \tag{9}$$

привлекая (1)-(3), из (7), (8) находим

$$\Phi = -\varphi. \tag{10}$$

Вводя замену

$$z = tg\frac{\varphi}{2}, \tag{11}$$

с учетом (1), (3) преобразуем (7) в уравнение Риккати

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{\tilde{k} - \omega_2 tg\tau}{\omega_1}\right)z^2 - \beta\frac{\omega_2}{\omega_1}z - \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{\tilde{k} - \omega_2 tg\tau}{\omega_1}\right). \tag{12}$$

Выделим частный случай

$$\tilde{k} - \omega_2 tg\tau = \beta\,\omega_1, \tag{13}$$

из которого, привлекая (2), находим

$$\omega_1(\tau) = \frac{\left(b\tilde{n} - \tilde{k}\right)\sin^2\tau - g_0\sin\tau + \tilde{k}}{\beta\cos^2\tau}, \tag{14}$$

при этом $\Pi(\tau)$ определим из (4), (1) так

$$\begin{gathered}\Pi(\tau) = h_1 + \frac{1}{\beta^2}\Big[2N\left(b\tilde{n} - \tilde{k}\right)^2\sin^2\tau - 4Ng_0\left(b\tilde{n} - \tilde{k}\right)\sin\tau - \\ - \frac{B_3\sin^3\tau + B_2\sin^2\tau + B_1\sin\tau + B_0}{\cos^4\tau}\Big],\end{gathered} \tag{15}$$

где

$$h_1 = h - (A - 3N)\left(b\tilde{n} - \tilde{k}\right)^2 + (A - N)\beta^2 b^2\tilde{n}^2 + 2N\left(g_0^2 + 2b\tilde{n}\tilde{k} - 2\tilde{k}^2\right), \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&B_3 = 2g_0\left[2N\tilde{k} - (A - 3N)\left(b\tilde{n} - \tilde{k}\right) + (A - N)\beta^2 b\tilde{n}\right],\\ &B_2 = (A - 3N)\left(g_0^2 - 2b\tilde{n}\tilde{k} + 2b^2\tilde{n}^2\right) + 2Nb\tilde{n}\left(b\tilde{n} - 2\tilde{k}\right) - (A - N)\beta^2\left(b^2\tilde{n}^2 + g_0^2\right),\\ &B_1 = -2g_0\left[(A - N)\tilde{k} + 2N\left(b\tilde{n} - \tilde{k}\right) + (A - N)\beta^2 b\tilde{n}\right],\\ &B_0 = (A - N)\tilde{k}^2 + 2N\left(g_0^2 + 2b\tilde{n}\tilde{k} - 2\tilde{k}^2\right) - (A - 3N)\left(b\tilde{n} - \tilde{k}\right)^2 + \\ &\quad + (A - N)\beta^2\left(g_0^2 + b^2\tilde{n}^2\right).\end{aligned} \tag{17}$$

Подставив в (12) (14), (2), устанавливаем затем зависимость z от τ

$$z(\tau) = e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} p(\tau)d\tau}\left[z(\tau) - \beta\int_{\tau}^{\tau} e^{\int_{\tau_0}^{\tau} p(\tau)d\tau}d\tau\right], \tag{18}$$

где

$$p(\tau)=\beta^2\frac{(g_0 b\tilde{n}\sin\tau)\cos\tau}{(b\tilde{n}-\tilde{k})\sin^2\tau-g_0\sin\tau+\tilde{k}}, \qquad (19)$$

а из (1) с учетом (14) находим

$$t=-\beta\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{\cos^2\tau\,d\tau}{(b\tilde{n}-\tilde{k})\sin^2\tau-g_0\sin\tau+\tilde{k}}. \qquad (20)$$

Итак, при условиях (6), (9) задача имеет решение (14), (2), (3), (15), (18), (20), (10).

Неподвижный аксоид. Компоненты момента количества движения системы, указанные соотношениями (22) работы [2], в данном решении имеют вид

$$G_1=0,\quad G_2=g\cos\tau,\quad G_3=g\sin\tau. \qquad (21)$$

Величины (23)-(27) работы [2] после подстановки в них (1), (2), (14) принимают вид

$$\omega_\nu=g_0+(1-b)\tilde{n}\sin\tau, \qquad (22)$$

$$\begin{aligned}\omega_p^2=\frac{1}{\beta^2\cos^4\tau}\Big\{&\Big[(b\tilde{n}-\tilde{k})\sin^2\tau-g_0\sin\tau+\tilde{k}\Big]^2+\\&+\beta^2\Big[(1-b)\tilde{n}\sin^2\tau+g_0\sin\tau+\tilde{n}\Big]^2\cos^2\tau\Big\},\end{aligned} \qquad (23)$$

$$\begin{gathered}V_\nu=(a-a_0)\,\omega_1\cos\tau,\quad V_\rho=-(a+a_0)\frac{\omega_\nu}{\omega_\rho}\omega_1\cos\tau,\\ V_\alpha=(a+a_0)\Big[\big(\omega_1^2+\omega_2^2\big)\sin\tau-\tilde{n}\,\omega_2\cos\tau\Big]/\omega_\rho,\end{gathered} \qquad (24)$$

$$\begin{gathered}r_\alpha=(a+a_0)\frac{\omega_1}{\omega_\rho}\cos\tau,\quad r_\alpha=(a_0-a)\sin\tau,\\ r_\rho=(a+a_0)\Big[\big(\omega_2\sin\tau-\tilde{n}\cos\tau\big)/\omega_\rho\Big]\cos\tau.\end{gathered} \qquad (25)$$

Уравнение мгновенной оси тела S находим из (17) работы [2], подставив в них (22)-(25):

$$\begin{gathered}\zeta_\nu(\tau,\mu)=2a_0\sin\tau+\left[\mu-(a+a_0)\frac{\tilde{n}}{\omega}\right]\frac{\omega_\nu}{\omega},\\ \zeta_\rho(\tau,\mu)=\left[\mu-(a+a_0)\frac{\tilde{n}}{\omega}\right]\frac{\omega_\rho}{\omega},\quad \zeta_\alpha=2a_0\omega_1\frac{\omega_\rho}{\omega^2}\cos\tau.\end{gathered} \qquad (26)$$

Зависимость угла α от τ определяем квадратурой из $g\omega_\rho^2\alpha' = (g \times \omega_*) \cdot \omega_*'$ с учетом (23), (21), (14), (2)

$$\alpha(\tau) = \beta \int_{\tau_0}^{\tau} \Big\{ (g_0 - b\tilde{n}\sin\tau)\left[(1-b)\tilde{n}\sin^2\tau + g_0\sin\tau - \tilde{n}\right] +$$

$$+ (\tilde{k} - \tilde{n})(g_0\sin\tau - b\tilde{n})\sin\tau\cos^2\tau\Big\} / \Big\{ \left[(b\tilde{n} - \tilde{k})\sin^2\tau - g_0\sin\tau + \tilde{k}\right]^2 + \qquad (27)$$

$$+ \beta^2\left[(1-b)\tilde{n}\sin^2\tau + g_0\sin\tau - \tilde{n}\right]^2\cos^2\tau\Big\}\, dt\,.$$

Уравнения неподвижного аксоида находим из (19) работы [2], внеся в них (26), (27),

$$\zeta_1(\tau,\mu) = 2a_0\sin\tau + \left[\mu - (a + a_0)\frac{\tilde{n}}{\omega(\tau)}\right]\frac{\omega_0(\tau)}{\omega(\tau)},$$

$$\zeta_2(\tau,\mu) = \left[\frac{\mu}{\omega(\tau)} - (a + a_0)\frac{\tilde{n}}{\omega^2(\tau)}\right]\omega_\rho(\tau)\cos\alpha(\tau) - 2a_0\omega_1(\tau)\frac{\omega_\rho(\tau)}{\omega^2(\tau)}\cos\tau\sin\alpha(\tau), \quad (28)$$

$$\zeta_3(\tau,\mu) = \left[\frac{\mu}{\omega(\tau)} - (a + a_0)\frac{\tilde{n}}{\omega^2(\tau)}\right]\omega_\rho(\tau)\sin\alpha(\tau) + 2a_0\omega_1(\tau)\frac{\omega_\rho(\tau)}{\omega^2(\tau)}\cos\tau\cos\alpha(\tau),$$

где

$$\omega^2(\tau) = \tilde{n}^2 + \frac{(g_0 - b\tilde{n}\sin\tau)^2}{\cos^2\tau} + \frac{1}{\beta^2\cos^4\tau}\left[(b\tilde{n} - \tilde{k})\sin^2\tau - g_0\sin\tau + \tilde{k}\right]^2, \qquad (29)$$

а $\omega_\nu(\tau), \omega_\rho(\tau), \omega_1(\tau), \alpha(\tau)$ определены соотношениями (22), (23), (24), (27).

Подвижный аксоид. Уравнения мгновенной оси в полуподвижном базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ определены соотношениями (40) работы [2]

$$\xi_1 = \left[\mu/\omega + (a_0\tilde{n}\cos 2\tau - a_0\omega_2\sin 2\tau - a\tilde{n})/\omega^2\right]\omega_1\,,$$

$$\xi_2 = \mu\omega_2/\omega + \left[a_0\omega_1^2\sin 2\tau - (a + a_0)\tilde{n}\,\omega_2\right]/\omega^2\,,$$

$$\xi_3 = \mu\tilde{n}/\omega + \left[(a - a_0\cos 2\tau)\,\omega_1^2 + (a + a_0)\,\omega_2^2\right]/\omega^2\,.$$

Внося в них (14), (2), находим

$$\xi_1 = \left\{ \frac{\mu}{\omega(\tau)} + \left[a_0 \tilde{n} \cos 2\tau - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2a_0 \left(g_0 - b\tilde{n} \sin\tau \right) \sin\tau - a\tilde{n} \right] \big/ \omega^2(\tau) \right\} \frac{\left(b\tilde{n} - \tilde{k} \right) \sin^2\tau - g_0 \sin\tau + \tilde{k}}{\beta \cos^2\tau},$$

$$\xi_2 = \mu \frac{g_0 - b\tilde{n}\sin\tau}{\omega(\tau)\cos\tau} + \left\{ 2a_0 \frac{\left[\left(b\tilde{n} - \tilde{k} \right) \sin^2\tau - g_0 \sin\tau + \tilde{k} \right]^2}{\beta \cos^3\tau} \sin\tau - \right.$$

$$\left. - (a - a_0) \frac{\left(g_0 - b\tilde{n}\sin\tau \right)\tilde{n}}{\cos\tau} \right\} \frac{1}{\omega^2(\tau)}, \qquad (30)$$

$$\xi_3 = \mu \frac{\tilde{n}}{\omega(\tau)} + \left\{ (a - a_0 \cos 2\tau) \frac{\left[\left(b\tilde{n} - \tilde{k} \right) \sin^2\tau - g_0 \sin\tau + \tilde{k} \right]^2}{\beta \cos^4\tau} + \right.$$

$$\left. + (a - a_0) \frac{\left(g_0 - b\tilde{n}\sin\tau \right)^2}{\cos^2\tau} \right\} \frac{1}{\omega^2(\tau)},$$

где $\omega(\tau)$ определено из (29).

Из (11) следует

$$\sin\varphi(\tau) = \frac{2z(\tau)}{1 + z^2(\tau)}, \quad \cos\varphi(\tau) = \frac{1 - z^2(\tau)}{1 + z^2(\tau)}, \qquad (31)$$

и уравнение подвижного аксоида получаем из (15) работы [3]

$$\begin{aligned} \xi_1^*(\tau,\mu) &= \xi_1(\tau,\mu)\cos\varphi(\tau) + \xi_2(\tau,\mu)\sin\varphi(\tau), \\ \xi_2^*(\tau,\mu) &= -\xi_1(\tau,\mu)\sin\varphi(\tau) + \xi_2(\tau,\mu)\cos\varphi(\tau), \\ \xi_3^*(\tau,\mu) &= \xi_3(\tau,\mu). \end{aligned} \qquad (32)$$

При движении подвижный аксоид (32) проскальзывает по неподвижному со скоростью

$$\upsilon_* = 2a_0 \left[\left(\tilde{k} - b\tilde{n} \right) \sin^2\tau + g_0 \sin\tau - \tilde{k} \right] \frac{g_0 + (1 - b)\tilde{n}\sin\tau}{\beta\,\omega(\tau)\cos\tau}.$$

Литература

1. Лесина М.Е. Три новых случая интегрируемости уравнений движения системы двух связанных тел // Механика твердого тела. – 1989. – Вып. 21. – С. 24-30.
2. Лесина М.Е., Харламов А.П. Новый подход к построению аксоидов в задаче о движении системы двух связанных тел // Там же. – 1993. – Вып. 25. – С. 30-42.

3. Лесина М.Е., Харламов А.П. Случаи интегрируемости уравнений движения по инерции двух тел, соединенных сферическим шарниром / Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – №4. – С. 26-31.
4. Харламов А.П. Гиростаты // Докл. АН УССР. – Сер. "А". – 1988. – № 9. – С. 38-41.