УДК 622.831

# Решение Феррари алгебраических уравнений четвертой степени

***С.Г.Ехилевский, Т.П.Фоменко, А.А.Медовникова***
*Донецкий национальный технический университет*

*В роботі надається ще один конструктивний спосіб зведення алгеброїчних рівнянь четвертого ступеню до відповідного рівняння третього ступеня.*

Шутят, что величие математика измеряется количеством принадлежащих ему громоздких доказательств. Позже появляется немало кратких, но совершенно не мотивированных решений той же проблемы. Наведение такого "лоска" ничего не дает для понимания творческой кухни ученого. То, как автор догадался до той или иной формулировки, является наиболее поучительным и практически всегда содержит идею оригинального (первого) доказательства. К сожалению, история науки неотвратимо теряет подробности получения конкретных результатов. Объективно это связано с увеличением удаленности во времени, а субъективно с неизбежным переосмыслением и необходимостью непрерывного интегрирования прежних результатов в единую систему постоянно обновляющихся научных знаний. В этой связи для восстановления исторической справедливости и воссоздания эстетической функции науки как составной части общечеловеческой культуры представляется целесообразным пройти по практически исчезнувшим следам наших предшественников. Кроме того, подобный научно-исторический эксперимент (экскурс) представляет самостоятельный творческий интерес, подобно современным экспедициям по маршрутам и со снаряжением древних путешественников и мореплавателей.

В математических справочниках приводится конечный результат решения Феррари алгебраических уравнения 4-й степени [1]. Способ его получения не получил широкого освещения в современных учебниках и практически не доступен новым поколениям читателей. Вместе с тем без проникновения в суть соответствующие формулы представляются громоздкими и, де-факто, игнорируются исследователями, как и формулы Кардано для решения уравнений 3-й степени. Настоящая публикация восполняет этот пробел.

Рассмотрим приведенное уравнение 4-ой степени

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 . \tag{1}$$

Представим его левую часть в виде произведения двух квадратных трехчленов[1]

$$\left(x^2 + ax + b\right)\left(x^2 + cx + d\right) = 0 . \qquad (2)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в уравнениях (1) и (2)

$$\begin{cases} a + c = A \\ ac + b + d = B \\ ad + bc = C \\ bd = D \end{cases} . \qquad (3)$$

Первые два уравнения системы (3) позволяют, воспользовавшись теоремой Виета ( $ac = B - b - d$ ; $a + c = A$ ), выразить *a* и *c* через *b + d*

$$a = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4(b + d - B)}}{2}; \qquad c = \frac{A - \sqrt{A^2 + 4(b + d - B)}}{2}. \qquad (4)$$

Произведение трехчленов в (2) не меняется при перемене мест сомножителей. Поэтому (3) инвариантно относительно перестановки *a* с *c*, и *b* с *d*. Т.е. предложенное в (4) распределение корней не умаляет общности.

Подставив (4) в третье уравнение системы (3), получим после группировки

$$\sqrt{A^2 + 4(b + d - B)}(d - b) = 2C - A(b + d) . \qquad (5)$$

Возведем обе части (5) в квадрат[2] с целью получения уравнения относительно *b + d*

$$\left(A^2 - 4B + 4(b + d)\right)(d - b)^2 = \left(2C - A(b + d)\right)^2 .$$

Выделим слева квадрат суммы

$$\left(A^2 - 4B + 4(b + d)\right)\left((d + d)^2 - 4bd\right) = 2C - \left(A(b + d)\right)^2 .$$

Подставив сюда из (3) $bd = D$ и введя замену

$$b + d = y , \qquad (6)$$

получим кубическое уравнение относительно *y*

$$\left(A^2 - 4B + 4y\right)\left(y^2 - 4D\right) = \left(2C - Ay\right)^2 . \qquad (7)$$

Таким образом, решение (1) сведено к поиску какого либо корня кубического уравнения (7). Любой из них позволяет с помощью (4) определить $a$ , $c$ и осуществить одно из трех разложений (2) упомянутых в первой сноске. Естественно набор корней уравнения (1) от этого произвола не зависит.

---

[1] Согласно основной теореме алгебры такая процедура неоднозначна, т.к. два корня из четырех могут быть отобраны тремя способами.

[2] При этом могут появиться посторонние корни, поэтому отбор значений для *b* и *d* будем осуществлять с помощью (5).

Если коэффициенты при степенях $x$ в (1) вещественны, используя неоднозначность разложения (2) естественно обеспечить вещественность фигурирующих там $a$, $c$, $b$ и $d$. Согласно (4) и (6) это означает обязательное наличие в рассматриваемом случае у (7) вещественного корня

$$y \geq B - \frac{A^2}{4}\,. \qquad (8)$$

Именно его и следует подставлять в (6).

Проиллюстрируем изложенный метод на примере:

$$x^4 - 10x^3 + 27x^2 - 14x + 2 = 0 \qquad (1')$$

Запишем систему (3)

$$\begin{cases} a + c = -10 \\ ac = 27 - b - d \\ ad + bc = -14 \\ bd = 2 \end{cases}, \qquad (3')$$

и выражения (4) для a и c

$$a = -5 + \sqrt{b + d - 2}\,; \qquad c = -5 - \sqrt{b + d - 2}\,. \qquad (4')$$

В рассматриваемом примере коэффициенты при степенях $x$ в (1') вещественны. В этом случае, фигурирующие в (2) $a$, $c$, $b$ и $d$ удобно тоже сделать вещественными. Для этого потребуем выполнения неравенства (8)

$$y = b + d \geq 2\,, \qquad (8')$$

что в частности приводит к необходимости выбора в качестве $y$ вещественного корня уравнения (7)

$$(y - 2)(y^2 - 8) = (5y - 14)^2\,. \qquad (7')$$

Таковой, как известно, всегда имеется у уравнения 3-й степени. Условие $y \geq 2$ сужает область поисков нужного корня, и позволяет подобрать $y = 3$. Тогда

$$\begin{cases} b + d = 3 \\ bd = 2 \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} b = 1 \\ d = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b = 2 \\ d = 1 \end{cases}$$

Отбирая b и d по условию (5), получаем $b = 1, d = 2$. Подставляя в (4') $b + d = 3$ найдем $a = -5 + \sqrt{3 - 2} = -4$, $c = -5 - \sqrt{3 - 2} = -6$. Теперь можно записать разложение (2):

$$\left(x^2 - 4x + 1\right)\left(x^2 - 6x + 2\right) = 0 . \qquad (2')$$

Отсюда $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ ; $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{7}$ .

*Литература*


1. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., Наука, 1968.