УДК 519.61/.64

Интерполирование функций на основе определителя Вандермонда

Петренко А.Д.

Донецкий национальный технический университет

Волков С.В.

Красноармейский филиал ДонНТУ

В межах єдиного підходу отримані основні співвідношення задачі інтерполяції функцій, які мають компактний вигляд та дозволяють значно спростити відповідні чисельні розрахунки.

Простейшая задача интерполирования состоит в аппроксимации функции $f(x)$ полиномом $Q_m(x)=\sum_{k=0}^{m} c_k x^k$, принимающим в заданных точках x_i $(i=0,1,\dots,n,\ m\le n\quad x_i\ne x_j$ при $i\ne j)$ те же значения, что и функция $f(x)$: $Q(x_i)=f(x_i)$. Геометрически это соответствует построению полинома степени не больше n, график которого проходит через $n+1$ заданную систему точек $M(x_i, y_i=f(x_i))$.

В указанной формулировке задача имеет единственное решение. Для общего случая, произвольно заданных узлов интерполирования это решение определяется формулой Лагранжа, а для равноотстоящих узлов x_i из нее легко могут быть получены также известные интерполяционные формулы Ньютона, Гаусса, Стирлинга и другие. Тем самым формула Лагранжа является более общей.

Формула Лагранжа выводится достаточно просто путем приравнивания значений многочлена и функции в узлах интерполирования (см., например, [1]). Эта же, а, следовательно, и остальные формулы могут быть получены на основе определителя Вандермонда. Как будет показано ниже, такая форма интерполяционного многочлена является более удобной как для его нахождения, так и для некоторых других приложений.

Будем исходить из определителя Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ z_0 & z_1 & . & . & z_n \\ z_0{}^2 & z_1{}^2 & . & . & z_n{}^2 \\ . & . & . & . & . \\ z_0{}^n & z_1{}^n & . & . & z_n{}^n \end{vmatrix} \equiv \prod_{i>j}^{n}\left(z_i - z_j\right), \tag{1}$$

который отличен от нуля при $z_i \neq z_j$.

В соотношении (1) выполним замену $z_j = x - x_j$, $j = \overline{0,n}$ и обозначим $\prod_{i<j}^{n}\left(x_i - x_j\right) = v_n$. Тогда имеем очевидное тождество:

$$1 \equiv \frac{1}{v_n} W_n = \frac{1}{v_n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ x - x_0 & x - x_1 & . & . & x - x_n \\ \left(x - x_0\right)^2 & \left(x - x_1\right)^2 & . & . & \left(x - x_n\right)^2 \\ . & . & . & . & . \\ \left(x - x_0\right)^n & \left(x - x_1\right)^n & . & . & \left(x - x_n\right)^n \end{vmatrix} \tag{2}$$

Формально введем следующий определитель (многочлен)

$$V_n\left(x\right) = \frac{1}{v_n} \begin{vmatrix} f\left(x_0\right) & f\left(x_1\right) & . & . & f\left(x_n\right) \\ x - x_0 & x - x_1 & . & . & x - x_n \\ \left(x - x_0\right)^2 & \left(x - x_1\right)^2 & . & . & \left(x - x_n\right)^2 \\ . & . & . & . & . \\ \left(x - x_0\right)^n & \left(x - x_1\right)^n & . & . & \left(x - x_n\right)^n \end{vmatrix}, \tag{3}$$

который раскроем его по элементам первой строки:

$$V_n\left(x\right) = \frac{1}{v_n} \sum_{i=0}^{n} \left(-1\right)^i f\left(x_i\right) \begin{vmatrix} x - x_0 & . & x - x_k & . & x - x_n \\ (x - x_0)^2 & . & (x - x_k)^2 & . & (x - x_n)^2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ (x - x_0)^n & . & \left(x - x_k\right)^n & . & (x - x_n)^n \end{vmatrix} \tag{4}$$

После вынесения из каждого столбца общих множителей алгебраические дополнения, стоящие в (4), представляют собой следующие выражения:

$$\left(-1\right)^i \prod_k (x - x_k) \begin{vmatrix} 1 & . & 1 & . & 1 \\ x - x_0 & . & x - x_k & . & x - x_n \\ \left(x - x_0\right)^2 & . & (x - x_k)^2 & . & \left(x - x_n\right)^2 \\ . & . & . & . & . \\ \left(x - x_0\right)^{n-1} & . & \left(x - x_k\right)^{n-1} & . & \left(x - x_n\right)^{n-1} \end{vmatrix} = \left(-1\right)^i \prod_k (x - x_k) W_{n-1}^i \tag{5}$$

где $k=\overline{0,n}$ $k\neq i$. Определитель $W_{n-1}^{i}-$есть аналог определителя (2) и т.о. не зависит от x. Следовательно, правая часть формулы (4) является многочленом n-й степени.

Рассмотрим разность $f(x)-V_n(x)$. С помощью (2) и (3) находим:

$$f(x)-V_n(x)=\frac{1}{v_n}\begin{vmatrix} f(x)-f(x_0) & f(x)-f(x_1) & . & . & f(x)-f(x_n) \\ x-x_0 & x-x_1 & . & . & x-x_n \\ (x-x_0)^2 & (x-x_1)^2 & . & . & (x-x_n)^2 \\ . & . & . & . & . \\ (x-x_0)^n & (x-x_1)^n & . & . & (x-x_n)^n \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Очевидно, что $f(x)-V_n(x)=0$ при $x=x_i$ $i=\overline{0,n}$. Следовательно, многочлен $V_n(x)$ является интерполяционным степени не выше n.

Выполняя простые преобразования, из соотношений (4) и (5) находим известную формулу Лагранжа:

$$V_n(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\quad\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x-x_i)\left(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right)'_{x=x_i}}\qquad. \qquad (7)$$

Формулу Ньютона можно получить из (3) путем соответствующего выбора узлов интерполяции. В зависимости от расположения значений функции в окрестности точки x_i, можно принять, $q=\frac{x-x_i}{h}$, где $h-$ шаг интерполяции. Тогда при раскрытии определителя по теореме Лапласа главным будет слагаемое, которое не содержит $i-$ го столбца. Пусть $q=\frac{x-x_0}{h}$, $h=x_{i+1}-x_i$, $i=\overline{0,n}$, тогда

$$v_n=\prod_{i<j}^{n}(x_i-x_j)=\prod_{i<j}^{n}((q-j)h-(q-i)h)=\prod_{i<j}^{n}(-h)(j-i)=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{i=0}^{n}h^i\prod_{j=0}^{n}j! \qquad (8)$$

$$V_n(x)=\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\prod_{i=0}^{n}h^i\prod_{j=0}^{n}j!}\begin{vmatrix} f(x_0) & f(x_1) & . & . & f(x_n) \\ qh & (q-1)h & . & . & (q-n)h \\ (qh)^2 & ((q-1)h)^2 & . & . & ((q-n)h)^2 \\ . & . & . & . & . \\ (qh)^n & ((q-1)h)^n & . & . & ((q-n)h)^n \end{vmatrix}=$$

$$
= \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\prod_{j=0}^{n} j!} \begin{vmatrix} f(x_0) & f(x_1) & . & . & f(x_n) \\ q & q-1 & . & . & q-n \\ q^2 & (q-1)^2 & . & . & (q-n)^2 \\ . & . & . & . & . \\ q^n & (q-1)^n & . & . & (q-n)^n \end{vmatrix}. \qquad (9)
$$

В явном виде этот определитель представляет собой формулу Ньютона.

Рассматривая интерполяционный многочлен в виде определителя (3), получим формулы численного дифференцирования. Производная определителя может быть представлена в виде суммы определителей, в каждом из которых одна из строк заменена строкой из соответствующих производных. Непосредственно из выражения (3) видно, что из всех указанных определителей отличным от нуля будет только один, а, именно, содержащий производные элементов второй строки. Таким образом, имеем:

$$
V'_n(x) = \frac{1!}{v_n} \begin{vmatrix} f(x_0) & f(x_1) & . & . & f(x_n) \\ 1 & 1 & . & . & 1 \\ (x-x_0)^2 & (x-x_1)^2 & . & . & (x-x_n)^2 \\ . & . & . & . & . \\ (x-x_0)^n & (x-x_1)^n & . & . & (x-x_n)^n \end{vmatrix}. \qquad (10)
$$

Аналогичным образом находится вторая производная

$$
V''_n(x) = \frac{2!}{v_n} \begin{vmatrix} f(x_0) & f(x_1) & . & . & . & f(x_n) \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ x-x_0 & x-x_1 & . & . & . & x-x_n \\ (x-x_0)^3 & (x-x_1)^3 & . & . & . & (x-x_n)^3 \\ . & . & . & . & . & . \\ (x-x_0)^n & (x-x_1)^n & . & . & . & (x-x_n)^n \end{vmatrix}. \qquad (11)
$$

и производная k - го $(k < n)$ порядка

$$
V^{(k)}{}_n(x) = \frac{k!}{v_n} \begin{vmatrix} f(x_0) & f(x_1) & . & . & f(x_n) \\ 1 & 1 & . & . & 1 \\ x-x_0 & x-x_1 & . & . & x-x_n \\ . & . & . & . & . \\ (x-x_0)^{k-1} & (x-x_1)^{k-1} & . & . & (x-x_n)^{k-1} \\ (x-x_0)^{k+1} & (x-x_1)^{k+1} & . & . & (x-x_n)^{k+1} \\ . & . & . & . & . \\ (x-x_0)^n & (x-x_1)^n & . & . & (x-x_n)^n \end{vmatrix}. \qquad (12)
$$

С помощью определителей легко могут быть вычислены также конечные разности различных порядков, как для равностоящих, так и для произвольно заданных значений аргумента.

Пусть заданы значения аргумента, $x_i, i=\overline{0,n}$ и соответствующие им значения $y_i, i=\overline{0,n}$ некоторой функции. Разделенные разности первого порядка можно выразить через определитель следующим образом:

$$[x_i, x_{i+1}] = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} = \frac{1}{x_i - x_{i+1}}\begin{vmatrix} y_i & y_{i+1} \\ 1 & 1 \end{vmatrix},\ i=\overline{0,n-1} \qquad (13)$$

Аналогичные выражения имеют место для конечных разностей второго

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}]-[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}$$

$$= \frac{1}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})(x_{i+1}-x_{i+2})}\begin{vmatrix} y_i & y_{i+1} & y_{i+2} \\ 1 & 1 & 1 \\ x-x_i & x-x_{i+1} & x-x_{i+2} \end{vmatrix}\ i=\overline{0,n-2} \qquad (14)$$

и произвольного $k-$го порядка для $i=\overline{0,n-k}$:

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{1}{v_k}\begin{vmatrix} y_i & y_{i+1} & . & . & y_{i+k} \\ 1 & 1 & . & . & 1 \\ x-x_i & x-x_{i+1} & . & . & x-x_{i+k} \\ . & . & . & . & . \\ (x-x_i)^{k-1} & (x-x_{i+1})^{k-1} & . & . & (x-x_{i+k})^{k-1} \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Сравнение формул (12) и (13) позволяет установить связь производной многочлена и конечной разности n-ого порядка, причем сам многочлен степени не больше n тождественно представляется интерполяционным с n+1 узлом.

Заметим, что в соотношении (15) правая часть не зависит от переменной x, поэтому ее можно положить равной нулю. При этом выражение (15) принимает более простой вид:

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{v_n}\begin{vmatrix} y_0 & y_1 & . & . & y_n \\ 1 & 1 & . & . & 1 \\ x_0 & x_1 & . & . & x_n \\ . & . & . & . & . \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & . & . & x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \qquad (16)$$

Для равноотстоящих значений аргумента выражения для конечных разностей значительно упрощаются. Пусть $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h - const$, тогда первые разности $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ можно записать как $\frac{(-1)^1 1!}{1-0}\begin{vmatrix} y_i & y_{i+1} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $i=\overline{0,n-1}$.

Вторые и последующие разности определяются следующими выражениями:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i = \frac{(-1)^2 2!}{(2-0)(2-1)(1-0)}\begin{vmatrix} y_i & y_{i+1} & y_{i+2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix},\ i=\overline{0,n-2},$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i =$$

$$\frac{(-1)^3 3!}{\prod_{j=0}^{3} j!}\begin{vmatrix} y_i & y_{i+1} & y_{i+2} & y_{i+3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2^2 & 3^2 \end{vmatrix}, \qquad i=\overline{0,n-3}$$

$$\Delta^k y_0 = \frac{(-1)^k}{\prod_{j=0}^{k-1} j!}\begin{vmatrix} y_i & y_{i+1} & . & . & y_{i+k} \\ 1 & 1 & . & . & 1 \\ 0 & 1 & . & . & k \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & . & . & k^{k-1} \end{vmatrix},\ i=\overline{0,n-k}. \tag{17}$$

Отметим, что поскольку разделенные разности задаются рекуррентными соотношениями, то для вычисления разности n-ого порядка необходимо предварительно вычислить $\frac{n(n+1)}{2}$ разностей низших порядков. В данном рассмотрении по формулам (16) и (17) это можно сделать непосредственно, вычисляя соответствующие определители.

Таким образом, с помощью модификации определителя Вандермонда оказалось возможным получить основные формулы задачи интерполирования функций в достаточно компактном виде. Кроме того, это представляется важным с точки зрения практических применений – расчеты сводятся к вычислению определителей, что легко выполнить с помощью стандартных программ.

Литература

1. Демидович Б.П., Марон И.А., Э.З. Шувалова, Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. М., 1967 г., гл. I.