УДК 531.38

Полуобратный метод в динамике систем связанных твердых тел

Лесина М.Е.

Донецкий национальный технический университет

Представление об абсолютно твердом теле широко используют при формировании математических моделей различных технических конструкций. В ряде случаев в расчетах необходимо учитывать динамические эффекты, роль которых в некоторых устройствах становится определяющей (транспортные средства, навигационные приборы и т. п.).

В строгой постановке математические модели подобных устройств, представляемых совокупностью взаимодействующих твердых тел, – это системы нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка, содержащих к тому же большой набор параметров. И потому по отношению к таким системам задачи построения точных решений в замкнутом виде обычно и не ставят.

При формировании математической модели технического устройства следуют путем, охарактеризованным В. В. Новожиловым: "Практика движется вперед путем рассуждений индуктивного характера. Когда возникает какая-либо новая проблема, прежде всего создается ее грубая модель. Она проверяется опытами, если таковые ей не предшествовали, и уже потом создаются все более и более совершенные модели по мере того, как в них возникает необходимость." [1, с. 24].

Такую эволюцию можно, например, отметить в создании математической модели колесных экипажей (И. Рокар [2], И. И. Метелицын [3], А. И. Лурье [4], Л. Г. Лобас [5]).

Но наряду с математическими моделями технических конструкций в теоретической механике сформировались, так называемые, классические задачи, не настолько сложные, чтобы становилась нереальной возможность исследования их аналитическими средствами, и в тоже время не столь простые, чтобы погасить интерес к ним.

Предназначенные достаточно широкому кругу читателей трактаты по механике используют в качестве примеров определенный набор задач, которые могут быть решены сравнительно простыми средствами. Это и задача двух тел, и задача о движении маятника, и задача о качении шара (или цилиндра) и т. п.

Обобщение этих традиционных задач в различных направлениях приводит обычно к существенным их усложнениям. Особый интерес в теоретической механике проявляют к таким обобщениям, при которых еще сохраняется возможность устанавливать те или иные особенности изучаемого явления.

Таково, например, одно из обобщений задачи двух тел. Переход к задаче трех тел привел, по существу, к созданию большого самостоятельного раздела аналитической динамики, стимулировал разработку новых методов исследования динамических систем[1].

И в динамике твердого тела переход от сравнительно элементарной задачи о движении тела, имеющего две фиксированные точки, (т.е. вращающегося вокруг оси, проходящей через эти точки) к телу с одной неподвижной точкой привел к классической задаче, которую в течении длительного времени изучают многие исследователи[2]. Здесь не ограничиваются стандартным для нелинейной системы кругом вопросов[3], но и направляют значительные усилия на поиск решений в замкнутом виде. Каждое такое решение становится объектом детального исследования, порождает относящуюся к нему литературу. Случай интегрируемости, найденный Л. Эйлером [13], с интерпретаций Л. Пуансо [14], и решение Ж. Л. Лагранжа [15] с геометрическим исследованием С. Д. Пуассона [16] траектории апекса традиционно включают в курсы теоретической механики различных уровней (см. напр., [17, гл. XIV; 18, гл. XVII-XVIII; 19, с. 311-328; 20, гл. VII; 21, гл. 5; 22, гл. VI]).

В более полных трактатах сообщают и о случаях интегрируемости С. В. Ковалевской, С. А. Чаплыгина, иногда упоминая о существовании других решений [23, гл. XX; 24, гл. VIII; 25, гл. IV-V]. Выделяется трактат Г. К. Суслова [26, часть IV, отдел V]: "нет ни одного трактата или курса по теоретической механике, где бы этот отдел был изложен с такой, почти исчерпывающей полнотой. Кроме классических интегрируемых случаев движения твердого тела вокруг неподвижной точки автор излагает еще некоторые случаи, допускающие

[1] Другие обобщения задачи двух тел оказались менее продуктивными. Вот характеристика одного из обобщений в общей теории относительности, данная специалистом в этой области: "Истинная проблема двух тел, например, двойных звезд, может рассматриваться только малонадежными приближенными методами, не основывающимися на строгой теории. По этой причине некоторые авторы получили противоречивые результаты уже в первом приближении, в котором сказываются релятивистские эффекты." [6, с. 297]

[2] Так, указатель публикаций [7], появившихся с 1749 по 1979 г.г. и относящихся лишь к одному разделу динамики твердого тела, содержит 1188 названий.

[3] В таких системах обычно находят стационарные решения и обсуждают условия их устойчивости [8, 9]. Иногда удается рассмотреть малые колебания в окрестности устойчивых стационарных решений [10, 11], а для неустойчивых – найти асимптотические к ним движения [12].

частичные интегралы (случаи Гесса и Бобылева - Стеклова)"[4]. О тех же решениях информирует и курс Н. Г. Четаева [27, гл.VI]. Аналитическое исследование случая Лагранжа с привлечением теории эллиптических функций содержится в монографиях [28; 29, гл. VII]. Фундаментальный трактат Ф. Клейна и А. Зоммерфельда [30] посвящен в основном многостороннему анализу случаев интегрируемости Эйлера и Лагранжа. Геометрические средства использованы, но основное внимание уделено аналитической стороне, широко использующей аппарат теории эллиптических функций, излагаемых здесь же в необходимом объеме. Обсуждается и с этой стороны случай Гесса. Отметим еще монографии [31, 32], содержащие наряду с традиционным изложением случаев Эйлера и Лагранжа, также и краткую информацию о некоторых других решениях.

Своеобразна монография В. В. Голубева [33]. Центральная часть ее – аналитическое исследование случая Ковалевской, которому предпослано развернутое изложение теории алгебраических функций, обращения эллиптических и ультраэллиптических интегралов. Приведены также сведения о случаях Эйлера, Лагранжа, Гесса - Аппельрота, Горячева - Чаплыгина, Бобылева - Стеклова.

В элементарных курсах механики (таких, например, как [34]), отдавая должное динамике твердого тела[5], ограничиваются рассмотрением простейших движений.

Присущие задачам динамики твердого тела трудности даже для одного тела удается преодолеть в отдельных случаях. Эти трудности неизмеримо возрастают при переходе к задачам о движении взаимодействующих тел, где построение решения в замкнутом виде представлялось практически недостижимым. Однако, были обнаружены системы специального вида, для которых такие результаты удается получить.

В первую очередь здесь следует отметить систему, получившую название гиростата[6]. В случае, когда гиростатический момент неизменен в теле-носителе, а последнее имеет закрепленную точку (центр идеального сферического шарнира)

---

[4] Из предисловия редакторов третьего издания трактата [26].

[5] "Динамика твердых тел представляет собой увлекательный и вместе с тем сложный предмет, являющийся венцом классической механики, и в то же время наиболее трудным ее разделом" [34, с. 243].

[6] В простейшем случае – это тело, несущее закрепленный в нем на оси динамически симметричный ротор. Гиростат более общего вида определен в [35].

и активными являются лишь силы тяжести, математическая модель этой системы такова[7]

$$G_1^{\bullet} + (G_3 + \lambda_3)\omega_2 - (G_2 + \lambda_2)\omega_3 = (e_2\nu_3 - e_3\nu_2)\Gamma, \qquad (1)$$

$$\nu_1^{\bullet} + \omega_2\nu_3 - \omega_3\nu_2 = 0 \qquad (123) \qquad (2)$$

$$G_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3.$$

При отсутствии гиростатического момента $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ – это уравнения классической задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Замечательно, что почти все результаты последней задачи к настоящему времени обобщены на систему (1). Первые результаты в этом направлении принадлежат Н. Е. Жуковскому [36] и В. Вольтерра [37], но лишь после работ Л. Н. Сретенского [38, 39] и П. В. Харламова [40, 41] начались систематические исследования по построению точных решений уравнений (1-2). Основная часть этих результатов опубликована на страницах выходившего ежегодно (начиная с 1969 г.) сборника "Механика твердого тела", выпускаемого Киевским издательством "Наукова думка". Важнейшие результаты указаны в монографиях [42, 43].

Неизменный интерес к уравнениям (1, 2) в аналитической механике объясняется, видимо, тем, что наличие трех интегралов

$$\omega_1 G_1 + \omega_2 G_2 + \omega_3 G_3 - 2(e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3)\Gamma = \text{пост.}, \qquad (3)$$

$$(G_1 + \lambda_1)\nu_1 + (G_2 + \lambda_2)\nu_2 + (G_3 + \lambda_3)\nu_3 = \text{пост.}, \qquad (4)$$

$$\nu_1^{\,2} + \nu_2^{\,2} + \nu_3^{\,2} = 1 \qquad (5)$$

и интегрирующего множителя (ненулевой константы) означает принципиальную возможность сведения задачи к квадратурам, как только будет найден дополнительный (четвертый) интеграл.

Распространенный метод его поиска можно назвать полуобратным, так как вместе с устанавливаемыми ограничениями значений параметров, характеризующих тот класс функций, которому, по предположению, должен принадлежать интеграл, одновременно появляются и условия, ограничивающие значения параметров самой системы уравнений, приспосабливаемой тем самым к искомому интегралу.

Понятно, что любое обобщение задачи, при котором в уравнениях появляются дополнительные параметры, расширяет и возможности

[7] Записаны лишь три из девяти соотношений. Остальные получают циклической перестановкой индексов, на что указывает символ (123).

полуобратного метода. Так, введенные Н. Е. Жуковским в динамические уравнения Эйлера гиростатические параметры λ_i, как было уже отмечено, привели к существенным обобщениям классических результатов, полученных ранее в задаче о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку. Такой же результат получен при введении в уравнения Кирхгофа параметров, характеризующих циркуляционные течения [44–49].

Еще большие возможности открывает введение в систему неконкретизированных функций.

Ж. Л. Лагранж [4, с. 258] ввел в уравнения Эйлера неконкретизированную силовую функцию

$$U(\nu_1,\nu_2,\nu_3;\nu_1',\nu_2',\nu_3';\nu_1'',\nu_2'',\nu_3''), \tag{6}$$

и Д. Н. Горячев ставит, по существу, полуобратную задачу конкретизации U так, чтобы уравнения

$$G_1^\bullet + \omega_2 G_3 - \omega_3 G_2 = \nu_3 \frac{\partial U}{\partial \nu_2} - \nu_2 \frac{\partial U}{\partial \nu_3} + \nu_3' \frac{\partial U}{\partial \nu_2'} - \nu_2' \frac{\partial U}{\partial \nu_3'} + \nu_3'' \frac{\partial U}{\partial \nu_2''} - \nu_2'' \frac{\partial U}{\partial \nu_3''} \ (123), \tag{7}$$

предложенные Ж. Л. Лагранжем, вместе с кинематическими допускали квадратичный по отношению к ω_1, ω_2, ω_3 интеграл [50]. Позже такую же задачу (но уже при ограничениях на параметры I_{ij}) он решает и для интегралов, имеющих по отношению к ω_1, ω_2, ω_3 третью и четвертую степень [51, 52]. В большинстве найденных Д. Н. Горячевым случаев уравнения не допускают интеграла площадей, и значит, полученного им интеграла недостаточно для доведения решения до квадратур (впрочем, он такую цель и не ставил).

С сохранением роли четвертого интеграла динамические уравнения Эйлера обобщены введением в них трех неконкретизированных функций

$$U(\nu_1,\nu_2,\nu_3), \quad f(\nu_1,\nu_2,\nu_3), \quad F(\nu_1,\nu_2,\nu_3) \tag{8}$$

так, что уравнения [53, 54]

$$G_1^\bullet = \left(G_2 + F\nu_2 + \frac{\partial f}{\partial \nu_2}\right)\omega_3 - \left(G_3 + F\nu_3 + \frac{\partial f}{\partial \nu_3}\right)\omega_2 + \nu_2 \frac{\partial \Pi}{\partial \nu_3} - \nu_3 \frac{\partial \Pi}{\partial \nu_2} \quad (123) \tag{9}$$

вместе с (2), сохраняя имевшийся у системы интегрирующий множитель, допускают три интеграла

$$\omega_1 G_1 + \omega_2 G_2 + \omega_3 G_3 + 2\Pi(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = 2h,$$

$$\nu_1 G_1 + \nu_2 G_2 + \nu_3 G_3 + f(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = k ,$$

$$\nu_1{}^2 + \nu_2{}^2 + \nu_3{}^2 = 1$$

и четвертому интегралу уравнений (9), (2) возвращена прежняя роль в построении квадратур.

Полуобратным методом конкретизированы функции (8), обеспечивающие существование у системы (9), (2) линейного или квадратичного по ω_i четвертого интеграла [55, 56]. Таким же путем построены решения с инвариантными соотношениями [57,58]. Необходимо однако отметить, что неконкретизированые функции (6), (8) введены без соотнесения к реальным физическим объектам и без обсуждения возможности реализации взаимодействий, представимых такими зависимостями. Конкретизация их в упомянутых работах основана лишь на математическом требовании существования интеграла или инвариантного соотношения.

И задача Жуковского о гиростате, и задача Кирхгофа о движении тела в жидкости, являясь, по существу, задачами о движении системы тел, по структуре уравнений аналогичны задаче о движении одного тела [59]. Но такие случаи исключительно редки.

Гироскоп в кардановом подвесе в предположении, что конструктивные несовершенства отсутствуют, – пример системы тел, для интегрирования уравнений движения которой достаточно интегралов, получаемых из общих теорем динамики. Иногда этот объект используют в качестве примера для проверки конструктивности тех или иных методов анализа ([25, с. 53; 4, с. 313-318; 27, с. 197-201] и др.), но поскольку гироскоп в кардановом подвесе имеет важные технические применения, уравнения движения его тщательно анализируются в специальных монографиях [60; 61, с. 441-482; 62; 63; 32, с. 188-207; 64, с. 239-256]. Г. В. Мозалевская и А. И. Хохлов дали обзор результатов по построению точных решений в этой задаче и ее обобщениях [65].

В последние годы ведется поиск удобных для практического использования форм уравнений движения системы связанных тел [66–70].

В [67, 68] указаны и некоторые простейшие случаи интегрируемости полученных уравнений. Найденное решение [71] было позже обобщено [72]. Эти решения характерны тем, что они получены для системы, в которой количество взаимодействующих тел не стеснено никакими ограничениями. Позже М. П. Харламов рассмотрел совокупность тел другой структуры (названной им гирокустом) и также указал случай интегрируемости с произвольным числом взаимодействующих тел [73].

Сборник [74] содержит переводы работ, в которых инженерными методами рассмотрены различные задачи, относящиеся к так называемым спутникам с двойным вращением. Это техническая конструкция, назначение которой – обеспечить стабилизацию ориентации спутника посредством вращения маховика, связанного с корпусом этого спутника. Основная цель работы сборника – анализ различного рода возмущений, порождаемых неизбежными в реальной конструкции несовершенствами. Уже на этапе составления уравнений авторы широко используют малость тех или иных параметров и нередко вводят априорные кинематические соотношения, которые фактически должны являться инвариантными соотношениями невыписываемой полной системы динамических уравнений. Поскольку в ряде случаев в дополнение к осесимметричному маховику принимается (по крайней мере в качестве первого приближения) и условие динамической осевой симметрии корпуса спутника, то естественно и возникла задача динамики твердого тела в следующей постановке. Два тела, обладающие динамической симметрией, сочленены идеальным сферическим шарниром, центр которого принадлежит осям симметрии обоих тел. Момент, зависящий лишь от угла θ, составляемого осями тел, характеризует взаимодействие тел в шарнире и, в частности, при моделировании спутника с двойным вращением назначением момента может быть приведение осей корпуса и маховика к коллинеарности (такая модель появляется, если во внимание принимают упругость опор маховика в корпусе спутника). Такая модель сформирована в работе [75], а при более общих предположениях о характере взаимодействия – в работе [76].

Позже было обнаружено, что эта математическая модель может быть использована и в другой технической задаче. Ориентированную на приложения теорию гирокомпаса развивают, привлекая к рассмотрению имеющие существенное значение динамические эффекты, обусловленные движением основания [77]. При этом, однако, обосновывают применимость прецессионной теории, в рамках которой математическая модель радикально упрощается. Н. П. Степаненко [78] вывела "точные уравнения движения системы двух осесимметричных тел, связанных идеальным сферическим шарниром, в предположении, что система находится в невесомости, а каждое из тел в невозмущенном движении вращается вокруг оси симметрии":

$$A_{3i}\left(\dot{\alpha}_{3i} + \dot{\alpha}_{1i}\sin\alpha_{2i}\right) = H_i \qquad (i=1,2)$$

$$F\ddot{\alpha}_{11}\cos\alpha_{21}-2F_1\dot{\alpha}_{11}\dot{\alpha}_{21}\sin\alpha_{21}+H\dot{\alpha}_{21}=$$

$$=D\left[\dot{\alpha}_{22}\sin\alpha_{22}\left(\dot{\alpha}_{12}^{\,2}+\dot{\alpha}_{22}^{\,2}\right)\cos\alpha_{22}\right]\sin(\alpha_{11}-\alpha_{12})+$$

$$+D\left[\ddot{\alpha}_{12}\cos\alpha_{22}-2\dot{\alpha}_{22}\dot{\alpha}_{12}\sin\alpha_{22}\right]\cos(\alpha_{11}-\alpha_{12}),$$

$$F\ddot{\alpha}_{21}+F_1\dot{\alpha}_{11}^{\,2}\cos\alpha_{21}\sin\alpha_{21}-H_1\dot{\alpha}_{11}\cos\alpha_{21}=$$

$$+D\left[\ddot{\alpha}_{22}\sin\alpha_{22}+\left(\dot{\alpha}_{22}^{\,2}+\dot{\alpha}_{11}^{\,2}\right)\cos\alpha_{22}\right]\sin\alpha_{21}\cos(\alpha_{11}-\alpha_{12})+$$

$$+D\left[2\dot{\alpha}_{12}\dot{\alpha}_{22}\sin\alpha_{22}-\ddot{\alpha}_{12}\cos\alpha_{22}\right]\sin\alpha_{21}\sin(\alpha_{11}-\alpha_{12})+$$

$$+D\left(\ddot{\alpha}_{22}\cos\alpha_{22}-\dot{\alpha}_{22}^{\,2}\sin\alpha_{22}\right)\cos\alpha_{21},$$

$$F_2\ddot{\alpha}_{12}\cos\alpha_{22}-2F\dot{\alpha}_{12}\dot{\alpha}_{22}\sin\alpha_{22}+H_2\dot{\alpha}_{22}=$$

$$=D\left[\ddot{\alpha}_{21}\sin\alpha_{21}+\left(\dot{\alpha}_{11}^{\,2}+\dot{\alpha}_{21}^{\,2}\right)\cos\alpha_{21}\right]\sin(\alpha_{12}-\alpha_{11})+$$

$$+D\left(\ddot{\alpha}_{11}\cos\alpha_{21}-2\dot{\alpha}_{11}\dot{\alpha}_{21}\sin\alpha_{21}\right)\cos(\alpha_{11}-\alpha_{12}),$$

$$F_2\ddot{\alpha}_{22}+F_2\dot{\alpha}_{12}^{\,2}\cos\alpha_{22}\sin\alpha_{22}-H_2\dot{\alpha}_{12}\cos\alpha_{22}=$$

$$=D\left[\ddot{\alpha}_{21}\sin\alpha_{21}+\left(\dot{\alpha}_{21}^{\,2}+\dot{\alpha}_{11}^{\,2}\right)\cos\alpha_{21}\right]\sin\alpha_{22}\cos(\alpha_{11}-\alpha_{12})+$$

$$+D\left[\ddot{\alpha}_{11}\cos\alpha_{21}-2\dot{\alpha}_{11}\dot{\alpha}_{21}\sin\alpha_{21}\right]\sin\alpha_{22}\sin(\alpha_{11}-\alpha_{12})+$$

$$+D\left(\ddot{\alpha}_{21}\cos\alpha_{21}-\dot{\alpha}_{21}^{\,2}\sin\alpha_{21}\right)\cos\alpha_{22}\,.$$

Здесь $F=A_1-\dfrac{m_1^{\,2}l_1^{\,2}}{m_1+m_2}$, $F_2=A_1-\dfrac{m_2^{\,2}l_2^{\,2}}{m_1+m_2}$, $D=\dfrac{m_1m_2l_1l_2}{m_1+m_2}$.

Сложность полученной системы в значительной мере обусловлена выбором основных переменных. Это углы Эйлера - Крылова α_{1i}, α_{2i}, α_{3i}, посредством которых определяется ориентация неизменно связанных с i-ым телом осей координат. И в работе [78] методом осреднения рассмотрено поведение системы вблизи простейшего стационарного движения лишь для случая, когда оба тела одинаковы и $H_1=H_2$.

Литература

1. Новожилов В. В. Две статьи о математических моделях в механике сплошной среды. М.: ИПМ АН СССР, ЛГУ, препринт № 215, 1983. – 56 С.
2. Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. – М: Изд-во иностр. лит., 1959. – 287 С.
3. Метелицин И. И. Избранные труды. – М: Наука. 1977. – 132 С.
4. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М: Физматиз. 1961. – 824 С.
5. Лобас Л. Г. Неголономные модели колесных экипажей. – Киев: Наук. думка. – 1986. – 232 С.
6. Бергман П. Г. Введение в теорию относительности. – М: И. Л.. – 1947. – 380 С.
7. Степанова Л. А. Динамика твердого тела с одной неподвижной точкой. Библиографический указатель литературы (1749-1979 г.г.). – Донецк: Донецкий политехн. ин-т. – 1980. – 132 С.
8. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. – М: ВЦ АН СССР. 1967. – 141 С.
9. Савченко А. Я. Устойчивость стационарных движений механических систем. – Киев: Наук. думка. 1977. – 160 С.
10. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. – М: Наука. 1977. – 328 С.
11. Архангельский Ю. А. Динамика быстровращающегося твердого тела. – М: Наука. 1985. – 192 С.
12. Горр Г. В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике системы твердых тел. – Препринт 89.03.// Ин-т прикладной мат. и мех. АН УССР. – 1989. – 67 С.
13. Euler L. Du mouvement rotation des corps solides autour d’un axe variable. – Histoire de l`Acadevie Royale des Sciences, Berlin. 1758-1765, **14**, P. 154-193.
14. Poinsot I. Théorie nouvelle de la rotation des corps. – F. math. pures et appl. . 1851. **16**. P. 9-130; 289-336.
15. Лагранж Ж. Л. Аналитическая механика. В 2-х т. Т. 2. М. – Л: Гостехиздат. – 1950. – 440 С.
16. Poisson S. D. Traite de mecanique. Vol. 2. Bachelier. Imprimeur – Libraire pour les Math. Paris. 1833. 782 p.
17. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Т. 2. М: Наука. 1971. – 461 С.
18. Валле-Пуссен Ш. Ж. Лекции по теоретической механике. Т. 1. М: И. Л. 1948. – 339 С.

19. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Теоретическая механика. – Л: Изд-во Ленингр. ун-та. 1985. – 536 С.
20. Вебстер А. Г. Механика материальных точек, упругих и жидких тел. – М.– Л: Гостехиздат. – 1933. – 634 С.
21. Голдстейн Г. Классическая механика. – М: Наука. – 1975. –451 С.
22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. – М: Физматиз. – 1958.– 206 С.
23. Аппель П. Теоретическая механика. В 2-х т. Т. 2. М: Физматиз. – 1960. – 486 С.
24. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. – М: Изд-во иностр. лит. 1951. Т. 2, ч. 2. – 555 С.
25. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. Т.II. М: Наука. – 1983. –544 С.
26. Суслов Г. К. Теоретическая механика. – М.–Л: Гостехтеориздат. – 1946. – 655 С.
27. Четаев Н. Г. Теоретическая механика. – М: Наука. – 1987. – 368 С.
28. Домогаров А. О. О свободном движении гироскопа. СПб. – 1893. – 175 С.
29. Мак-Миллан В. Д. Динамика твердого тела. – М: И. Л. – 1951. – 467 С.
30. Klein F., Sommerfeld A. Über die theorie des Kreisels. N. Y. Johnson Repr. Corpor. Stuttgart, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1965. – 966 С.
31. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применение. Т. 1. М.–Л: И. Л. 1952. – 351 С.
32. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. – М: Мир. – 1974. – 526 С.
33. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. – М: Гостехиздат. – 1953. – 287 С.
34. Киттель Ч., Найт В., Рудерман М. Механика. – М: Наука. – 1963. – 448 С.
35. Харламов П. В. Гиростаты. // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1988. – № 9. – С. 38-41.
36. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. – Собр. соч. Т. 1. М: 1949. – С. 31-152.
37. Volterra V. Sur la theorie des variations des latitudes. – Asta math. 1899. **22**. P. 201-358.
38. Сретенский Л. Н. О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом. – Вест. Моск. ун-та. Математика, механика. 1963. № 3. – С. 60-71.
39. Сретенский Л. Н. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гироскопа. Докл. АН СССР. – 1963.– **149**. № 2. С. 292-294.

40. Харламов П. В. Об уравнениях движения гироскопа. – Труды межвуз. конф. по прикл. теории устойч. дв. и анал. мех. (декабрь, 1962, Казань). Казань, 1964.
41. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела. Изд-во Новосиб. ун-та. – 1965. – 221 С.
42. Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. Киев: Наук. думка. – 1978. – 296 С.
43. Харламова Е. И., Мозалевская Г. В. Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка. 1986. – 296 С.
44. Kirchhoff G. R. Über die Bewegung eines Rotationkörpers in einer Flüssigkeit. – Journ. für die reine und angew. – 1870. – B. 71. – S. 223-237.
45. Clebsch R. Zur Theorie der Fräghebi tamomente und der Drehung eines festeb Körpere um einen Punkt. – Journ. reine und angew. Math., 1859 (1860), 57, H. 1-4, 73-77.
46. Стеклов В. А. О движении тяжелого твердого тела в жидкости. – Сообщения Харьковского математического Общества, серия 2, т. 2, Харьков. 1891, С. 209-235.
47. Ляпунов А. М. Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости. – Собр. соч., т. 1, 1954, С. 320-324.
48. Чаплыгин С. А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. – Ст. I. – Собр. соч., т.1 М–Л., 1948, С. 136-193; Ст. II. – Там же, С. 194-311.
49. Харламов П. В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью. // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17-29.
50. Горячев Д. Н. Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. Варшава, 1910, 62 С.
51. Горячев Д. Н. Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера. – Варшавские университетские известия, вып. 3, Варшава, 1916, С. 1-15.
52. Горячев Д. Н. Новые случаи движения твердого тела вокруг неподвижной точки. – Варшавские университетские известия, вып. 3, Варшава, 1915, С. 1-11.
53. Харламов М. П. Симметрия в системах с гироскопическими силами. // Механика твердого тела. – 1983. – Вып. 15. – С. 87-93.

54. Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л: Изд-во Ленингр. унив. 1988. – 200 С.
55. Орешкина Л. Н. Случаи интегрируемости уравнений М. П. Харламова // Механика твердого тела. – 1989. – Вып. 21. – С. 1-9.
56. Харламова Л. Н. Одно решение уравнений движения тела под действием потенциальных и гироскопических сил // Там же. – 1990. – Вып. 22. – С. 38-43.
57. Орешкина Л. Н. Об уравнениях М. П. Харламова // Там же. – 1989. – Вып. 19. – С. 30-33.
58. Мозалевская Г. В., Орешкина Л. Н. Безнутационные движения твердого тела // Там же. – 1991. – Вып. 23. – С. 1-5.
59. Харламова Е. И., Степанова Л. А. Об изоморфизме некоторых классических задач динамики твердого тела и попытка построения новых решений путем замены переменных // Там же. – 1988. – Вып. 20. – С. 1-13.
60. Николаи Е. Л. О движении уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе. / В кн.: *Николаи Е. Л.* Труды по механике. М: 1955. – С. 455-496.
61. Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М: Наука. – 1976. – 670 С.
62. Климов Д. М., Харламов С. А. Динамика гироскопа в кардановом подвесе. – М: Наука. – 1978. – 208 С.
63. Лунц Я. Л. Введение в теорию гироскопов. М: Наука. – 1972. – 296 С.
64. Leimanis E. The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point. Springer – Verlag New York Inc. – 1965. – 337 p.
65. Мозалевская Г. В., Хохлов А. И. Современное состояние задачи построения точных решений уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе. // Исследования по истории механики. – М: 1983. – С. 90- 100.
66. Лурье А. И. Некоторые задачи динамики системы твердых тел. // Известия Ленинградского политехнического ин-та. – 1960. – № 210. – С. 7-22.
67. Харламов П. В. Об уравнениях движения системы твердых тел. // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4.– С. 52-73.
68. Харламов П. В. Составной пространственный маятник. Там же. – С. 73-81.
69. Виттенбург И. Динамика системы твердых тел. – М: Мир. – 1980. – 292 С.
70. Лилов Л. Структура, кинематика и динамика системы твердых тел. // Успехи механики (Варшава). – 1983. – **6**, – вып. ½. – С. 53-90.

71. Савченко А. Я., Лесина М. Е. Частное решение уравнений движения системы гироскопов Лагранжа. // Механика твердого тела. – 1973. – Вып. 5. – С. 27-30.
72. Харламов П. В. Некоторые классы точных решений задачи о движении системы гироскопов Лагранжа. // Матем. физика. – 1982. – Вып. 32. – С. 63-76.
73. Харламов М. П. Гиросистемы. // Механика твердого тела. – 1987. – Вып. 19. – С. 42-54.
74. Задачи стабилизации составных спутников (серия: "Механика. Новое в зарубежной науке"). М: Мир. – 1975. – 206 С.
75. Лесина М. Е. О колебаниях оси маховика в теле-носителе. // Механика твердого тела. – 1979. – Вып. 11. – С. 32-37.
76. Лесина М. Е. Об условиях существования точных решений задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных сферическим шарниром. // Механика твердого тела. – 1984. – Вып. – 16. – С. 32-36.
77. Кошляков В. Н. Теория гироскопических приборов. М: Наука. – 1972. – 344 С.
78. Степаненко Н. П. Об уходе двух связанных гироскопов. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1969. – № 1. – С. 40-44.