УДК 535.56

Метод медленно меняющихся амплитуд в задачах нелинейной оптики гиротропных сред

Петренко А. Д.
Донецкий национальный технический университет

На прикладі задачі про визначення напруженості електричного поля плоскої електромагнітної хвилі в анізотропному кристалі з кубічною нелінійністю показано, що використання класичного методу повільно змінючихся амплітуд не завжди є коректним і може приводити к утручанню ефектів тих же порядків, які ураховуються.

В рамках классической теории поле электромагнитной волны в нелинейной среде находится из волнового уравнения, дополненного соответствующими материальными соотношениями. В большинстве задач нелинейной оптики точные аналитические решения этого уравнения удается получить крайне редко, поэтому приходится использовать либо численные методы, либо приближенные аналитические. В средах со слабой нелинейностью, как правило, используются методы возмущений в той или иной форме; среди них, по-видимому, наиболее распространенным и ставшим уже каноническим является метод медленно меняющихся амплитуд (ММА) [1].

В качестве его иллюстрации рассмотрим задачу о самовоздействии интенсивной световой волны в полубесконечной кубичной нелинейной среде. В простом случае распространения всех плоских поперечных взаимодействующих волн в направлении оси симметрии OZ волновое уравнение представляет собой следующую систему связанных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2E_1(z)}{dz^2}+\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1E_1(z)=-\dfrac{4\pi\omega^2}{c^2}P_1^{NL}(E_1(z),E_2(z)) \\ \dfrac{d^2E_2(z)}{dz^2}+\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2E_2(z)=-\dfrac{4\pi\omega^2}{c^2}P_2^{NL}(E_1(z),E_2(z)) \end{cases}. \qquad (1)$$

Здесь ω - частота света, $\varepsilon_{1,2}$ - главные значения поперечного тензора диэлектрической проницаемости, $P_{1,2}^{NL}(E_1(z),E_2(z))$ - компоненты вектора нелинейной поляризации.

Суть приближения ММА состоит в том, что слабое взаимодействие между волнами приводит к малому изменению их амплитуд, поэтому поле в среде можно разложить по степеням малого параметра (порядка нелинейности):

$$E_{1,2}(z) = (A_{1,2}^{(0)} + A_{1,2}^{(1)}(z) + ...)e^{ik_{1,2}z}\,.$$

(2)

Подставляя (2) в (1) и приравнивая члены одного порядка, вместо (1) получаем:

$$(-k_{1,2}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{1,2})A_{1,2}^{(0)} = 0\,,$$

(3)

$$2ik_{1,2}\frac{dA_{1,2}^{(1)}(z)}{dz} = -\frac{4\pi\omega^2}{c^2}P_{1,2}^{NL}(A_1^{(0)}e^{k_1 z}, A_2^{(0)}e^{ik_2 z})e^{-ik_{1,2}z}\,,$$

(4)

Из соотношения (3) находятся корни дисперсионного уравнения (предполагается, что линейное поглощение волн мало и линейный дихроизм отсутствует)

$$k_{1,2}^{(0)} = \frac{\omega}{c}(\sqrt{\operatorname{Re}\varepsilon_{1,2}} + \frac{i\operatorname{Im}\varepsilon_{1,2}}{2\sqrt{\operatorname{Re}\varepsilon_{1,2}}}) = (k_{1,2} + i\kappa)\,, \tag{5}$$

а интегрирование уравнения (5) дает выражение для напряженности электрического поля волны, распространяющейся в положительном направлении оси OZ:

$$E_{1,2}(z) = E_{1,2}^0(z) + \frac{2\pi i\omega^2}{c^2 k_{1,2}}\int_0^z P_{1,2}^{NL}(E_1^0(z'), E_2^0(z'))e^{ik_{1,2}(z-z')}dz'\,, \tag{6}$$

где

$$E_{1,2}^0(z) = E_{1,2}(0)\exp(ik_{1,2}^0 z)\,, \tag{7}$$

$E_{1,2}(0)$ - амплитуды волн на границе среды.

В кубической нелинейной среде процесс самовоздействия света описывается вектором поляризации $P^{NL} = \chi^{(3)}EEE^{\bullet}$ и, следовательно, можно записать

$$P_{1,2}^{NL}(E_1^0(z), E_2^0(z)) = \sum_{m=1}^{4} D_{1,2}^{(m)}\exp(iq_m z)\,, \tag{8}$$

где $D_{1,2}^{m}$ - параметры, определяемые компонентами нелинейной восприимчивости $\chi^{(3)}$ и значениями амплитуд поля на границе среды, $q_1=k_1$, $q_2=k_2$, $q_3=2k_1-k_2$, $q_3=2k_2-k_1$.

После подстановки (8) в (6) находим искомое выражение для напряженности электрического поля в среде:

$$E_{1,2}^{MMA}(z)=(E_{1,2}(0)+\frac{2\pi i\omega^2}{c^2k_{1,2}}\sum_{m=1}^{4}D_{1,2}^{(m)}\varphi_{1,2}^{(m)}(z))e^{ik_{1,2}z}, \qquad (9)$$

где

$$\varphi_{1,2}^{(m)}(z)=\int_0^z e^{i(q_m-k_{1,2})z'}dz'. \qquad (10)$$

При выводе формулы (9) использовано одно из основных допущений ММА:

$$\left|\frac{d^2A_{1,2}^{(1)}(z)}{dz^2}\right| \prec\prec \left|k_{1,2}\frac{dA_{1,2}^{(1)}(z)}{dz}\right|, \qquad (11)$$

которое считается очевидным, поскольку на расстояниях меньших длины волны обменом энергией между взаимодействующими волнами можно пренебречь (см., например, [2]). Физически это означает, что не учитывается отраженная волна, генерируемая нелинейностью среды.

В рассматриваемой задаче неравенство (11) принимает вид

$$\left|\sum_{m=1,2}^{4}D_{1,2}^{(m)}(q_m-k_{1,2})e^{iq_mz}\right| \prec\prec k_{1,2}\left|\sum_{m=1}^{4}D_{1,2}^{(m)}e^{iq_mz}\right| \qquad (12)$$

Его левая часть тождественно равна нулю когда $P_{1,2}^{NL}\propto\exp(ik_{1,2}z)$ - это возможно, если $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ или, если падающая волна совпадает с одной из нормальных волн. В общем случае степень выполнения неравенства (12) требует отдельного рассмотрения (см. ниже).

Эту же задачу решим в приближении заданного поля, когда напряженности электрических полей в правых частях уравнений (1) следует заменить их невозмущенными значениями (7) – решениями соответствующей линейной задачи. При этом система (1) приобретает вид

$$\begin{cases} \dfrac{d^2E_1(z)}{dz^2} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 E_1(z) = -\dfrac{4\pi\omega^2}{c^2} P_1^{NL}(E_1^0(z), E_2^0(z)) \\ \dfrac{d^2E_2(z)}{dz^2} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 E_2(z) = -\dfrac{4\pi\omega^2}{c^2} P_2^{NL}(E_1^0(z), E_2^0(z)) \end{cases},$$

(13)

и ее общее решение легко может быть получено в квадратурах:

$$E_{1,2}(z) = C_{1,2}^{(+)} e^{ik_{1,2}z} + C_{1,2}^{(-)} e^{-ik_{1,2}z} - \frac{4\pi\omega^2}{c^2 k_{1,2}} \int_0^z P_1^{NL}(E_1^0(z'), E_2^0(z')) \sin(ik_{1,2}(z-z')dz'. \qquad (14)$$

Постоянные интегрирования $C_{1,2}^{(+-)}$ определим из условия обращения в ноль «нефизических», экспоненциально растущих с координатой слагаемых и граничного условия $E_{1,2}(z=0) = E_{1,2}(0)$. В результате находим:

$$E_{1,2}^{ЗП}(z) = (E_{1,2}(0) + \frac{2\pi i\omega^2}{c^2 k_{1,2}} \sum_{m=1}^{4} (\frac{2k_{1,2}}{q_m + k_{1,2}}) D_{1,2}^{(m)} \varphi_{1,2}^{(m)}(z)) e^{ik_{1,2}z}.$$

(15)

Сравнивая (15) и (9), замечаем, что выражение (15) отличается от (9) наличием множителей под знаком суммы и совпадает с ним, если $q_m = k_{1,2}$, т.е. в тех же случаях, когда автоматически выполняется приближение (11). В общем случае степень различия формул (9) и (15) определяется видом конкретной задачи.

В качестве примера рассмотрим магнитные кристаллы, где как линейная, так и нелинейная восприимчивости могут быть представлены в виде сумм чисто оптических и магнитооптических частей: $\varepsilon = \varepsilon^{(\backslash o)} + \varepsilon^{(m)}, \chi = \chi^{(o)} + \chi^{(m)}$ и соответственно $k = k_0 \pm \Delta k$. При этом можно считать, что

$$\frac{\varepsilon^{(m)}}{\varepsilon^{(o)}} \propto \frac{\chi^{(m)}}{\chi^{(o)}} \propto \frac{\Delta k}{k_0}. \qquad (16)$$

Тогда в соответствии с (15) нелинейную часть амплитуды поля можно записать в виде суммы трех слагаемых, соответствующих различным механизмам взаимодействия волн в кристалле: $A^{NL} = A_1 + A_2 + A_3$, Первые два из них $A_1 \propto \chi^{(0)}$ и $A_2 \propto \chi^{(m)}$ соответственно связаны с чисто оптической и магнитооптической нелинейностями. Третье слагаемое $A_3 \propto \frac{\Delta k}{k_0}\chi^{(o)}$ возникает, в частности, из дополнительных по сравнению с (9) множителей в формуле (13) и описывает комбинированный эффект нелинейного преломления волн и линейной анизотропии [3]. Согласно оценкам (16) $A_3 \propto A_2$ и, таким образом, в приближении ММА эффекты такого же порядка, как и учитываемые, остаются вне рассмотрения.

Для модели магнитного кристалла неравенство (12) сводится к $\Delta k \prec\prec k_0$ и действительно справедливо, если речь не идет об эффектах того же порядка таких, например, как нелинейная оптическая активность [3] или нелинейные эффекты Фарадея [4] и Керра [5].

Таким образом, применение ММА при решении некоторых задач нелинейной оптики не всегда является корректным и может приводить к неконтролируемым ошибкам.

Литература

1. С.А. Ахманов, Р.В. Хохлов. Проблемы нелинейной оптики. ВИНИТИ. М. (1964). 295 с.
2. И.Р. Шен. Принципы нелинейной оптики. «Наука». М. (1989). С. 61.
3. А. Д. Петренко, Г. И. Труш. Кристаллография 37, 1, 159 (1992).
4. С. Б. Борисов, И. Л. Любчанский, А. Д. Петренко, Г. И. Труш. ЖЭТФ 105, 3, 524 (1994).
5. А. Д. Петренко. ФТТ 41, 4, 656 (1999).