УДК 531.383

Новая задача аналитической динамики

М.Е. Лесина
Донецкий национальный технический университет

В аналітичну динаміку введений новий об'єкт дослідження, який одержано ідеалізацією конструкції гіросфери – чутливого елемента гірокомпаса.
Знайдено випадок інтегрованості одержаної системи рівнянь, методом годографів побудоване повне розв'язання.

Аналитическая динамика предлагает различные формы дифференциальных уравнений движения механических систем – эйлеровы, лагранжевы, гамильтоновы. Предпочтительность той или иной формы устанавливается в применение ее к конкретным задачам, однако, набор, так называемых, классических задач аналитической динамики невелик [1].

Принимаем постановку задачи и обозначения работы [2]. Полагаем, что центр масс каждого из гиростатов (кожухов, несущих вращающиеся роторы) [3] принадлежит оси крепления кожуха в корпусе гиросферы, и центральные эллипсоиды инерции этих гиростатов являются эллипсоидами вращения, оси симметрии которых совпадают с осями крепления кожухов. При таких условиях главные моменты инерции J_x, J_y, J_z системы не зависят от угла ε поворота кожухов.

Полагаем далее, что центр масс гиросферы совпадает с ее геометрическим центром (метацентрическая высота l=0), а сторонние силы M_x^*, M_y^*, M_z^* отсутствуют.

Полученные в [2] уравнения (2.8.13, 14) с характеристикой, связывающей кожухи пружины, согласованной с условием Геккелера (2.9.5), записываются в виде

$$J_x\omega_x^\bullet + \left(J_z - J_y\right)\omega_y\omega_z - 2B\omega_z\cos\varepsilon = 0, \qquad (1)$$

$$J_y\omega_y^\bullet + \left(J_x - J_z\right)\omega_z\omega_x - 2B\varepsilon^\bullet\sin\varepsilon = 0, \qquad (2)$$

$$J_z\omega_z^\bullet + \left(J_y - J_x\right)\omega_y\omega_z - 2B\omega_z\cos\varepsilon = 0, \qquad (3)$$

$$J\varepsilon^{\bullet\bullet} + 2B\omega_y\sin\varepsilon = c\sin\varepsilon\cos\varepsilon, \qquad (4)$$

где c характеризует жесткость пружины.

Интегрирующий множитель автономной системы (1)-(4) – отличная от нуля константа.

Эти уравнения имеют интеграл энергии

$$J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2 + 2J\varepsilon^{\bullet 2} + 2c\cos^2\varepsilon = 2h \qquad (5)$$

и выражающей сохранение момента количества движения системы относительно ее центра масс интеграл

$$J_x^2\omega_x^2 + \left(J_y\omega_y + 2B\cos\varepsilon\right)^2 + J_z^2\omega_z^2 = k^2. \qquad (6)$$

Указывающий направление этого момента единичный вектор ν неподвижен в пространстве, а в осях, связанных с корпусом гиросферы, он имеет компоненты

$$\nu_x = J_x\omega_x/k,\;\; \nu_y = \left(J_y\omega_y + 2B\cos\varepsilon\right)/k,\;\; \nu_z = J_z\omega_z/k,$$

и при построении полного решения может быть использован для нахождения неподвижного годографа угловой скорости корпуса [4]

$$\omega_\nu = \omega_x\nu_x + \omega_y\nu_y + \omega_z\nu_z, \qquad (7)$$

$$\omega_\rho^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 - \omega_\nu^2, \qquad (8)$$

$$d\alpha = \begin{vmatrix} \nu_x & \nu_y & \nu_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ d\omega_x & d\omega_y & d\omega_z \end{vmatrix} \qquad (9)$$

Одно из решений уравнений (1)-(4) построим для инвариантного соотношения

$$\omega_y = n, \qquad (10)$$

выражающего условие сохранения переменной ω_y своего начального значения. При этом из (4) следует интеграл

$$J\varepsilon^{\bullet 2} - 2Bn\cos\varepsilon + c\cos^2\varepsilon = E$$

с постоянной интегрирования E.

Требование существования инвариантного соотношения (10) накладывает ограничения на параметр системы

$$c = -4JB^2 / J_x J_z, \quad J = J_x J_z / 2\left(2J_y - J_x - J_z\right)$$

и начальные значения ω_x^0, ω_z^0 переменных ω_x, ω_z

$$J_x\left(J_x - J_z\right)\omega_x^{0\,2} = 4B\left[B\left(1-\cos\varepsilon_0\right) - \left(J_y - J_z\right)n\right]\left(1+\cos\varepsilon_0\right),$$

$$J_x\left(J_x - J_z\right)\omega_z^{0\,2} = -4B\left[B\left(1+\cos\varepsilon_0\right) - \left(J_y - J_z\right)n\right]\left(1-\cos\varepsilon_0\right).$$

Не остаются независимыми и постоянные k^2, h , E

$$\left(J_x - J_z\right)k^2 = \left(J_x - J_z\right)\left(4B^2 + J_y^2 n^2\right) - 4Bn\left[J_x\left(J_x - J_z\right) + J_z\left(J_y - J_z\right)\right]$$

$$2\left(J_x - J_z\right)\left(2J_y - J_x - J_z\right)h = \left(J_x - J_z\right)\left(2J_y - J_x - J_z\right)\left(J_y n - 2B\cos\varepsilon_0\right)n -$$

$$-4B\left(2J_y - J_x - J_z\right)^2 n - 4\left(J_x - J_z\right)\left[B - \left(J_y - J_z\right)n\right]\left[B + \left(J_y - J_z\right)n\right],$$

$$\left(2J_y - J_x - J_z\right)E = -2\left[B - \left(J_y - J_z\right)n\right]\left[B + \left(J_y - J_x\right)n\right].$$

(последнее условие устанавливает зависимость между начальными значениями ε_0, ε_0^0).

При таких ограничениях находим ω_x, ω_z в зависимости от

$$u = \cos\varepsilon \qquad (11)$$

из интегралов (5), (6)

$$\begin{aligned} J_x\left(J_x - J_z\right)\omega_x^2(u) &= 4B^2\left(1+u\right)\left(u_1 - u\right), \\ J_z\left(J_x - J_z\right)\omega_z^2(u) &= 4B^2\left(1-u\right)\left(u_2 - u\right), \end{aligned} \qquad (12)$$

и связь u со временем t установим квадратурой, внеся (10)-(12) в (2),

$$t = \frac{\sqrt{J_x J_z}}{2B}\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(u-u_1\right)\left(u-u_2\right)}},$$

где $u_1 = 1 - \left(J_y - J_z\right)n / B$, $u_2 = -1 - \left(J_y - J_z\right)n / B$.

В этом решении подвижный годограф угловой скорости – принадлежащая плоскости (10) алгебраическая кривая (12). Неподвижный годограф получим, внеся (10), (11) в (7)-(9):

$$\left(J_x - J_z\right)^2 k\omega_v = B^2\left\{-2\left(J_x - J_z\right)\left(2 - u_1 - u_2\right)u + \left(J_x - J_z\right)\left(u_1 + u_2\right) + \right.$$

$$\left. + \left[J_x\left(1-u_1\right) + + J_z\left(1+u_2\right)\right]\left(2 - u_1 - u_2\right)\right\},$$

$$\omega_\rho^2 = \frac{4B^4}{J_x J_z\left(J_x - J_z\right)^2 k^2}\left[J_x\left(1-u_1\right)^2\left(1-u\right)\left(u_2 - u\right) + J_z\left(1-u_2\right)^2\left(1-u\right)\left(u_1 - u\right)\right],$$

(13)

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{k\sqrt{J_x J_z}\left[\left(2 + u_1 - u_2\right)u - u_1 - u_2\right]\left[-\left(u_1 + u_2\right)u + 1 + u_1 u_2\right]}{2B\left[J_x\left(1+u_1\right)^2\left(1-u\right)\left(u_2 - u\right) + J_z\left(1-u_2\right)^2\left(1+u\right)\left(u_1 - u\right)\right]\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(u-u_1\right)\left(u-u_2\right)}}, \text{ где}$$

$$k^2 = \frac{B^2}{\left(J_x - J_z\right)^2}\left\{\left[J_x\left(1-u_1\right) + J_z\left(1+u_2\right)\right]^2 + 4\left(J_x - J_z\right)\left(J_x u_1 + J_z u_2\right)\right\}.$$

Движение корпуса гиросферы воспроизводится качением без скольжения подвижного годографа (10), (12) по неподвижному (13).

Литература

1. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. Киев: Наук. думка.– 1978.– 296 С.
2. Кошляков В.Н. Теория гироскопических компасов. М: Наука.– 1972.– 344 С.
3. Харламов П.В. Решения с инвариантными соотношениями некоторых задач динамики твердого тела. В кн.: История механики гироскопических систем. М: Наука. – 1975. – С. 5-19.
4. Харламов П.В. Гиростаты. // Докл. АН УССР, Сер.А. – 1988. – № 9. –