УДК 539.238

# Дифференциал функции и его применение к обоснованию «ПРАВИЛА 70»

***Тю Н.С., Гусар Г.А.***
*Донецкий национальный технический университет*

При изучении различных разделов курса экономики часто используется так называемое «правило 70», согласно которому время удвоения некоторой величины, меняющейся по закону сложных процентов, определяется делением числа 70 на $r$, где $r$ - процентный рост указанной величины за единицу времени [1,2]. Например, если валовой национальный продукт ежегодно возрастает на 5%, то приблизительно через 70/5=14 лет он удвоится. В настоящей заметке приводится вывод этого правила, который может быть использован в курсе высшей математики при изложении понятия дифференциала функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой точке $a$ и её окрестности. Если в этой точке $f(x)$ имеет конечную производную, то её приращение может быть представлено в виде:

$$\Delta y = dy + \omega\,(a, \Delta x), \tag{1}$$

где $dy = f'(a) \cdot \Delta x$ - дифференциал этой функции, а $\omega\,(a, \Delta x)$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем приращение аргумента $\Delta x$ при $\Delta x \to 0$.

При малых значениях $\Delta x$ приращение функции приближенно равно её дифференциалу: $\Delta y \approx dy.$ Учитывая, что $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$, отсюда получаем:

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a) \cdot \Delta x. \tag{2}$$

Эта формула удобна для приближенного вычисления значения функции $f(a + \Delta x)$ по известным значениям функции и её первой производной в точке *a*. Например, для логарифмической функции $y = \ln x$ при $a$=1 имеем:

$$\ln(1 + \Delta x) \approx \Delta x, \tag{3}$$

так что $\ln 1.1 \approx 0.1, \quad \ln 1.02 \approx 0.02$ и т.д.

Перейдем теперь к выводу «правила 70». Рассмотрим величину *S*, зависящую от времени *t*, при дискретных значениях $t = 0; 1\tau; 2\tau; 3\tau; \ldots; k\tau$, где $\tau$ - некоторая единица времени, например, один год. Значения *S* при этих *t*, которые мы обозначим $S_0, S_1, \ldots, S_k$, очевидно, образуют конечную последовательность $\{S_n\}$. Многие величины, описывающие окружающую нас действительность (численность человеческой популяции, количество бактерий в культуре, число радиоактивных ядер, сумма банковского вклада на депозите и т.д.), меняются со временем так, что прирост этой величины $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$ прямо пропорционален значению этой величины в предыдущий момент времени $S_{n-1}$. Пусть $\Delta S_n$ составляет $r$ % от $S_{n-1}$:

$$S_n - S_{n-1} = \frac{r}{100} S_{n-1}. \tag{4}$$

Отсюда находим $S_n = S_{n-1} \cdot (1 + \frac{r}{100})$, т.е. каждый член указанной выше последовательности, начиная со второго, получается из предыдущего умножением на постоянное число. Следовательно, последовательность $\{S_n\}$ является геометрической прогрессией с первым членом $S_0$ и знаменателем $q = (1 + r/100)$, поэтому выражение для её члена с номером $n$ имеет вид:

$$S_n = S_0 \cdot (1 + \frac{r}{100})^n . \tag{5}$$

Положим здесь $n = t/\tau$ и будем считать эту формулу справедливой при произвольных значениях *t*. Найдём время $T$, за которое величина $S$ удвоится. Подставив $S_{t/\tau} = 2S_0$ в (5) и сократив обе части равенства на $S_0$, получим показательное уравнение, откуда логарифмированием находим:

$$T = \tau \frac{\ln 2}{\ln (1 + r/100)} \tag{6}$$

Считая $r/100$ малой величиной по сравнению с единицей, воспользуемся формулой (3). При этом в числителе появится число $100\ln 2$=69.31…, которое удобно заменить числом 70. В результате приближённо получим:

$$T = \tau \frac{70}{r} \qquad (7)$$

Точность этой формулы невелика, однако она позволяет быстро оценить порядок времени удвоения величины, меняющейся по показательному закону. Например, согласно данным ООН численность населения Земли к началу 1975 г. составляла 4 млрд. человек и ежегодно возрастала на 2 %. Если в обозримом будущем темпы роста останутся неизменными, то, согласно (7), через 70/2=35 лет число людей, живущих на Земле, увеличится в два раза и к 2010 году составит примерно 8 млрд. человек.

*Литература*

1. Самуэльсон Пол А., Нордхаус Вильям Д. Экономика. - М.: Бином – КноРус, 1997.- 800 с.
2. Липсиц И. Экономика без тайн.- М.: Дело – Вита-пресс, 1994.-352 с.

SUMMARY

By using the notion of differential the “rule of 70” is obtained. It can be used for teaching of junior students.