УДК 531.38

Два случая интегрируемости уравнений Кирхгофа

М.Е. Лесина

Донецкий национальный технический университет

Однією з найбільш загальних задач динаміки твердого тіла, що зводяться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь, є задача про рух твердого тіла в ідеальній нестисливій рідині, що безмежно простягається.

Основними змінними такої задачі Г. Кірхгоф призначив компоненти кутової швидкості і швидкості тіла в осях, пов'язаних з тілом. У цих змінних традиційно і записують рівняння руху, як правило розглядаючи лише той випадок, коли поверхня, що обмежує тіло, однозв'язана [1, с. 200; 2, с.390; 3, с. 210].

У більш загальному випадку, коли тіло має порожнини, заповнені рідиною, й отвори, через які циркулює зовнішня стосовно тіла рідина, В.О. Стєклов [5] узагальнив рівняння задачі.

П.В. Харламов запропонував нову форму рівнянь руху узагальненої Стєкловим задачі, призначивши основними змінними компоненти імпульсивної сили і пару [6, 7]. У випадку відсутності циркуляцій ця форма рівнянь є у С.О. Чаплигіна [10, 11].

У додаток до вказаних двох форм диференціальних рівнянь П.В. Харламов в [9] дає можливість запису ще двох форм цієї задачі, коли основними змінними призначаються пара і швидкість або імпульсивна сила і швидкість. Розгорнутий запис чотирьох форм рівнянь наведений у [8]. Детальна бібліографія пошуку інваріантних співвідношень (одного, двох і трьох лінійних) наведена в [4].

Уравнения Кирхгофа [6] имеют вид

$$P_1^\bullet = \omega_3(P_2+\lambda_2)-\omega_2(P_3+\lambda_3)+(u_3-\mu_3)R_2-(u_2-\mu_2)R_3, \qquad (1)$$

$$R_1^\bullet = \omega_3 R_2 - \omega_2 R_3, \qquad (123) \qquad (2)$$

$$\omega_i = a_{ij}P_j + c_{ij}R_j, \qquad u_i = b_{ij}R_j + c_{ji}P_j, \qquad (3)$$

содержат набор параметров – компоненты симметричных тензоров a_{ij}, b_{ij}, тензора общего вида c_{ij} и векторы λ_i, μ_i.

Известны три интеграла

$$a_{ij}P_iP_j + b_{ij}R_iR_j + 2c_{ij}P_iR_j - 2\mu_i R_i = 2h, \qquad (4)$$

$$(P_1+\lambda_1)R_1 + (P_2+\lambda_2)R_2 + (P_3+\lambda_3)R_3 = m, \qquad (5)$$

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = R^2 \qquad (6)$$

Зададим предполагаемые инвариантные соотношения в виде

$$P_i = s_i \qquad (123) \qquad (7)$$

и вычислим их производные в силу уравнений (1) – три квадратичных по

и вычислим их производные в силу уравнений (1) – три квадратичных по отношению к R_1, R_2, R_3 инвариантных соотношения

$$\begin{aligned}
& b_{23}\left(R_2^2 - R_3^2\right) + \left(b_{33} - b_{22}\right) R_2 R_3 - b_{12} R_3 R_1 + b_{31} R_1 R_2 + \\
& + \left[\left(s_2 + \lambda_2\right) c_{31} - \left(s_3 + \lambda_3\right) c_{21}\right] R_1 + \\
& + \left[\left(s_2 + \lambda_2\right) c_{32} - \left(s_3 + \lambda_3\right) c_{22} + c_{j3} s_j - \mu_3\right] R_2 + \\
& + \left[\left(s_2 + \lambda_2\right) c_{33} - \left(s_3 + \lambda_3\right) c_{23} - c_{j2} s_j + \mu_2\right] R_3 + \\
& + \left(s_2 + \lambda_2\right) a_{3j} s_j - \left(s_3 + \lambda_3\right) a_{2j} s_j = 0 \quad (123)
\end{aligned} \tag{8}$$

и по приведенному в [4] обоснованию они должны быть тождествами по R_i. Приравнивая нулю коэффициенты при квадратичных членах, заключаем, что тензор b_{ij} шаровой:

$$b_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \tag{9}$$

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = b, \tag{10}$$

а коэффициенты при линейных членах и свободный член приводят к условиям:

$$\left(s_2 + \lambda_2\right) c_{31} - \left(s_3 + \lambda_3\right) c_{21} = 0, \tag{11}$$

$$\mu_1 - c_{j1} s_j = \left(s_3 + \lambda_3\right) c_{13} - \left(s_1 + \lambda_1\right) c_{33} = -\left(s_1 + \lambda_1\right) c_{22} - \left(s_2 + \lambda_2\right) c_{12} \quad (123) \tag{12}$$

$$\left(s_2 + \lambda_2\right) a_{3j} s_j = \left(s_3 + \lambda_3\right) a_{2j} s_j \tag{13}$$

Отметим вначале частный случай

$$s_i = -\lambda_i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{14}$$

Условия (11)-(13) сводятся к таким

$$\mu_i = -c_{ij} \lambda_j, \tag{15}$$

параметры a_{ij}, b, c_{ij} остаются свободными.

Величины (3) при условиях (7), (9), (10), (14) принимают вид

$$\omega_i = c_{ij} R_j - a_{ij} \lambda_j, \qquad u_i = b R_i - c_{ij} \lambda_j, \tag{16}$$

и уравнения (2) записываются в виде

$$R_1^{\bullet} = \left(c_{3j} R_j - a_{3j} \lambda_j\right) R_2 - \left(c_{2j} R_j - a_{2j} \lambda_j\right) R_3 \quad (123). \tag{17}$$

В случае (7), (14) интеграл (5) исчезает, определив постоянную m=0, а интеграл (4) вследствие (7), (9), (10), (14), (15) представимый в виде $b\left(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2\right) + a_{ij} \lambda_j = 2h$, оказывается следствием интеграла (6). И таким образом, система (17) имеет лишь один известный интеграл (6). По поводу ее частного случая – односвязной поверхности, когда $\lambda_i = 0$ (а вместе с ними и $s_i = 0,\ \ \mu_i = 0$), С.А. Чаплыгин замечает [11, с. 282], что уравнения (17) ему не удалось проинтегрировать. Но С.А. Чаплыгин отметил, что "существует, однакоже, один частный случай, когда это можно осуществить". Если же $\lambda_i \neq 0$, обобщение такого решения получено в [4].

В [4] угловая скорость (16) представлена в форме

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla S + \mathbf{n}^{*} \times \mathbf{R} - \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\lambda}, \qquad (18)$$

где $S = \frac{1}{2}\left(c_{ij} + c_{ji}\right) R_i R_j,\ \ n_1^{*} = \frac{1}{2}\left(c_{32} - c_{23}\right)$ (123), так что

$$\omega_1 = c_{11}R_1 + \frac{1}{2}\left(c_{12} + c_{21}\right)R_2 + \frac{1}{2}\left(c_{13} + c_{31}\right)R_3 + n_2^{*}R_3 - n_3^{*}R_2 - a_{1j}\lambda_j \qquad (123)$$

Поворотом осей приводим квадратичную форму S к главным осям. Вследствие инвариантного представления выражения (18) его структура сохраняется при повороте осей. Чтобы не усложнять представления соотношения (18) и уравнений (17) в новой системе координат, сохраним обозначения преобразованных векторов **ω,R, n,** а для компонент преобразованного вектора **a·λ** введем обозначения σ_i:

$$\omega_1 = c_1R_1 + n_2R_3 - n_3R_2 - \sigma_1 \quad (123) \qquad (19)$$

$$R_1^{\bullet} = \left(c_3R_3 + n_1R_2 - n_2R_1 - \sigma_3\right)R_2 - \left(c_2R_2 + n_3R_1 - n_1R_3 - \sigma_2\right)R_3\,(123) \qquad (20)$$

Вводя обозначения

$$x_i = R_i / R, \quad \tilde{c}_i = c_iR, \quad \tilde{n}_i = n_iR, \qquad (21)$$

запишем уравнения (20) и (6) в виде

$$x_1^{\bullet} = \left(\tilde{c}_3x_3 + \tilde{n}_1x_2 - \tilde{n}_2x_1 - \sigma_3\right)x_2 - \left(\tilde{c}_2x_2 + \tilde{n}_3x_1 - \tilde{n}_1x_3 - \sigma_2\right)x_3 \quad (123) \qquad (22)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \qquad (23)$$

Пусть z – комплексная переменная, изображаемая либо точкой $z = x + yi$ на комплексной плоскости (дополненной бесконечно удаленной точкой), либо точкой трехмерной сферы (23). Будем обозначать эту сферу S_0 и называть ее римановой сферой.

Соответствие между точками комплексной плоскости и точкой римановой сферы определяется равенствами

$$x = \frac{x_1}{1+x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{1+x_3}, \qquad z = x + iy, \tag{24}$$

$$x_1 = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \quad x_2 = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad x_3 = \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \tag{25}$$

Отображение S_0 на z-плоскость является конформным и известно под названием стереографической проекции. Внесем выражения (25) в уравнения (22) и получим систему

$$\begin{aligned}
2x^{\bullet} = \frac{1}{1+x^2+y^2}\Big\{&\Big[\tilde{c}_3\big(1-x^2-y^2\big)+2\tilde{n}_1 y-2\tilde{n}_2 x-\sigma_3\big(1+x^2+y^2\big)\Big]2y+\\
&+\Big[2\tilde{c}_1 x+\tilde{n}_2\big(1-x^2-y^2\big)-2\tilde{n}_3 y-\sigma_1\big(1+x^2+y^2\big)\Big]2xy-\\
&-\Big[2\tilde{c}_2 y+2\tilde{n}_3 x-\tilde{n}_1\big(1-x^2-y^2\big)-\sigma_2\big(1+x^2+y^2\big)\Big]\big(1+x^2-y^2\big)\Big\};\\
2y^{\bullet} = \frac{1}{1+x^2+y^2}\Big\{&\Big[2\tilde{c}_1 x+\tilde{n}_2\big(1-x^2-y^2\big)-2\tilde{n}_3 y-\sigma_1\big(1+x^2+y^2\big)\Big]\big(1-x^2+y^2\big)-\\
&-\Big[2\tilde{c}_2 y+2\tilde{n}_3 x-\tilde{n}_1\big(1-x^2-y^2\big)-\sigma_2\big(1+x^2+y^2\big)\Big]2xy-\\
&-\Big[\tilde{c}_3\big(1-x^2-y^2\big)+2\tilde{n}_1 y-2\tilde{n}_2 x-\sigma_3\big(1+x^2+y^2\big)\Big]2x\Big\}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Разделив второе уравнение на первое, приходим к обобщенному уравнению Абеля второго рода[1]

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_2(x,y)}{F_1(x,y)}, \tag{27}$$

в котором

$$\begin{aligned}
F_1(x,y) = {}&(\tilde{n}_1-\sigma_2)y^4+2\big[-(\tilde{n}_2+\sigma_1)x+\tilde{c}_2-\tilde{c}_3-\sigma_3\big]y^3+2\big(-\tilde{n}_3 x+\tilde{n}_1\big)y^2+\\
&+2\Big[-(\tilde{n}_2+\sigma_1)x^3+(2\tilde{c}_1-\tilde{c}_2-\tilde{c}_3-\sigma_3)x^2-(\tilde{n}_2+\sigma_1)x+\tilde{c}_3-\tilde{c}_2-\sigma_3\Big]y+\\
&+(\sigma_2-\tilde{n}_1)x^4-2\tilde{n}_3 x^3+2\sigma_2 x^2-2\tilde{n}_3 x+\sigma_2+\tilde{n}_1;\\
F_2(x,y) = {}&(\tilde{n}_2+\sigma_1)y^4+2\big[(\tilde{n}_1-\sigma_2)x+\tilde{n}_3\big]y^3+2\big[(2\tilde{c}_2-\tilde{c}_3-\tilde{c}_1-\sigma_3)x+\sigma_1\big]y^2+\\
&+2\Big[(\tilde{n}_1-\sigma_2)x^3+\tilde{n}_3 x^2+(\tilde{n}_1-\sigma_2)x+\tilde{n}_3\Big]y-\\
&-(\sigma_1+\tilde{n}_2)x^4+2(\tilde{c}_1-\tilde{c}_3-\sigma_3)x^3-2\tilde{n}_2 x^2+2(\tilde{c}_3-\tilde{c}_1-\sigma_3)x+\sigma_1-\tilde{n}_2.
\end{aligned}$$

Первое решение. Пусть

---

[1] Уже интегрирование уравнения Риккати , как указал в 1841 г. Лиувилль, не сводится к квадратурам, т.е. к конечной последовательности элементарных действий над известными функциями и интегрирование этих функций. Уравнение Риккати является весьма частным случаем (27).

$$c_1 = c_2 = c_3 = c, \tag{29}$$

тогда система(26) принимает вид

$$\begin{aligned} 2x^{\bullet} &= (\tilde{n}_1 - \sigma_2)\, y^2 - 2(\sigma_1 + \tilde{n}_2)\, xy + (\sigma_2 - \tilde{n}_1)\, x^2 - 2\sigma_3 y - 2\tilde{n}_3 x + \sigma_2 + \tilde{n}_1, \\ 2y^{\bullet} &= -(\sigma_1 + \tilde{n}_2)\, y^2 - 2(\tilde{n}_1 - \sigma_2)\, xy + (\sigma_1 + \tilde{n}_2)\, x^2 - 2\tilde{n}_3 y + 2\sigma_3 x - \sigma_1 + \tilde{n}_2. \end{aligned} \tag{30}$$

Умножая на i второе уравнение этой системы и складывая с первым, для комплексной переменной z получим уравнение первого порядка

$$2z^{\bullet} = [\sigma_2 - \tilde{n}_1 + (\sigma_1 + \tilde{n}_2)\, i]\, z^2 - 2(\tilde{n}_3 - \sigma_3 i)\, z + \sigma_2 + \tilde{n}_1 + (-\sigma_1 + \tilde{n}_2)\, i, \tag{31}$$

из которого устанавливаем зависимость z от времени t:

$$z(t) = \frac{[M_0 + (M_1 \cos\beta t - M_2 \sin\beta t)\,]e^{\alpha t} + \left[M_3 + (M_2 \cos\beta t + M_1 \sin\beta t)\, e^{\alpha t}\right] i}{[Q_0 + (Q_1 \cos\beta t - Q_2 \sin\beta t)\,]e^{\alpha t} + \left[Q_3 + (Q_2 \cos\beta t + Q_1 \sin\beta t)\, e^{\alpha t}\right] i}, \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned} M_0 &= (\tilde{n}_3 + \alpha)\, x_0 + (\sigma_3 - \beta)\, y_0 - \sigma_2 - \tilde{n}_1, \quad & Q_0 &= (\sigma_2 - \tilde{n}_1)\, x_0 - (\sigma_1 + \tilde{n}_2)\, y_0 - \tilde{n}_3 + \alpha, \\ M_1 &= (-\tilde{n}_3 + \alpha)\, x_0 - (\sigma_3 + \beta)\, y_0 + \sigma_2 + \tilde{n}_1, & Q_1 &= -(\sigma_2 - \tilde{n}_1)\, x_0 + (\sigma_1 + \tilde{n}_2)\, y_0 + \tilde{n}_3 + \alpha, \\ M_2 &= (\sigma_3 + \beta)\, x_0 + (-\tilde{n}_3 + \alpha)\, y_0 - \sigma_1 + \tilde{n}_2, & Q_2 &= -(\sigma_1 + \tilde{n}_2)\, x_0 - (\sigma_2 - \tilde{n}_1)\, y_0 - \sigma_3 + \beta, \\ M_3 &= (-\sigma_3 + \beta)\, x_0 + (\tilde{n}_3 + \alpha)\, y_0 + \sigma_1 - \tilde{n}_2; & Q_3 &= (\sigma_1 + \tilde{n}_2)\, x_0 + (\sigma_2 - \tilde{n}_1)\, y_0 + \sigma_3 + \beta; \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{1}{2}\left(\tilde{n}^2 - \sigma^2 + \sqrt{\left(\tilde{n}^2 - \sigma^2\right)^2 + 4\,(\tilde{\mathbf{n}} \bullet \boldsymbol{\sigma})^2} \right), \\ \beta^2 &= \frac{1}{2}\left(\sigma^2 - \tilde{n}^2 + \sqrt{\left(\tilde{n}^2 - \sigma^2\right)^2 + 4\,(\tilde{\mathbf{n}} \bullet \boldsymbol{\sigma})^2} \right), \end{aligned} \tag{34}$$

$$\tilde{\mathbf{n}} = (\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \tilde{n}_3), \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \tilde{\mathbf{n}} \bullet \boldsymbol{\sigma} = \tilde{n}_1 \sigma_1 + \tilde{n}_2 \sigma_2 + \tilde{n}_3 \sigma_3 \tag{35}$$

$$z_0 = z(0) = (x_0; y_0). \tag{36}$$

Обозначим через $\upsilon(t), w(t), p(t), q(t)$ соответственно действительные и мнимые части числителя и знаменателя правой части (32)

$$z(t) = \frac{\upsilon(t) + iw(t)}{p(t) + iq(t)}. \tag{37}$$

Отделив действительную $x(t)$ и мнимую $y(t)$ части $z(t)$, находим

$$x(t) = \frac{\upsilon(t)\, p(t) + w(t)\, q(t)}{p^2(t) + q^2(t)}, \qquad y(t) = \frac{w(t)\, p(t) - \upsilon(t)\, q(t)}{p^2(t) + q^2(t)} \tag{38}$$

$$x^2(t) + y^2(t) = \frac{\upsilon^2(t) + w^2(t)}{p^2(t) + q^2(t)} \tag{39}$$

Подставив эти выражения в (25), получим

$$x_1 = \frac{2\left(\upsilon p + wq\right)}{\upsilon^2 + w^2 + p^2 + q^2},\ x_2 = \frac{2\left(wp - \upsilon q\right)}{\upsilon^2 + w^2 + p^2 + q^2},\ x_3 = \frac{p^2 + q^2 - \upsilon^2 - w^2}{p^2 + q^2 + \upsilon^2 + w^2}, \quad (40)$$

в которых

$$\upsilon\left(t\right) = M_0 + \left(M_1 \cos\beta t - M_2 \sin\beta t\right)e^{\alpha t}, \quad w\left(t\right) = M_3 + \left(M_2 \cos\beta t + M_1 \sin\beta t\right)e^{\alpha t},$$

$$p\left(t\right) = Q_0 + \left(Q_1 \cos\beta t - Q_2 \sin\beta t\right)e^{\alpha t}, \quad q\left(t\right) = Q_3 + \left(Q_2 \cos\beta t + Q_1 \sin\beta t\right)e^{\alpha t}.$$

Внесем эти соотношения в (40), учтем (33)-(36); (21) и выполнив элементарные, но громоздкие преобразования, представим искомое решение в виде

$$\frac{R_k}{R} = x_k = \frac{H_{0k} + 2\left(H_{1k}\cos\beta t + H_{2k}\sin\beta t\right)e^{\alpha t} + H_{3k}e^{2\alpha t}}{G_0 + 2\left(G_1\cos\beta t + G_2\sin\beta t\right)e^{\alpha t} + G_3 e^{2\alpha t}} \quad \left(k = 1,2,3\right) \quad (41)$$

В векторной форме его можно записать так

$$\frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\mathbf{H}_0 + 2\left(\mathbf{H}_1\cos\beta t + \mathbf{H}_2\sin\beta t\right)e^{\alpha t} + \mathbf{H}_3 e^{2\alpha t}}{G_0 + 2\left(G_1\cos\beta t + G_2\sin\beta t\right)e^{\alpha t} + G_3 e^{2\alpha t}}, \quad (42)$$

где

$$\mathbf{H}_0 = \left(\alpha^2 + \beta^2 - \sigma^2 - \tilde{n}^2\right)\mathbf{x}^0 + 2\left(-\tilde{\mathbf{n}} + \mathbf{x}^0 \times \boldsymbol{\sigma}\right)\alpha + 2\left(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{x}^0 \times \tilde{\mathbf{n}}\right)\beta +$$
$$+ 2\left(\boldsymbol{\sigma} \times \tilde{\mathbf{n}}\right) + 2\left(\mathbf{x}^0 \bullet \boldsymbol{\sigma}\right)\boldsymbol{\sigma} + 2\left(\mathbf{x}^0 \bullet \tilde{\mathbf{n}}\right)\tilde{\mathbf{n}},$$

$$\mathbf{H}_1 = \left(\alpha^2 + \beta^2 + \sigma^2 + \tilde{n}^2\right)\mathbf{x}^0 - 2\left(\boldsymbol{\sigma} \times \tilde{\mathbf{n}}\right) - 2\left(\mathbf{x}^0 \bullet \boldsymbol{\sigma}\right)\boldsymbol{\sigma} - 2\left(\mathbf{x}^0 \bullet \tilde{\mathbf{n}}\right)\tilde{\mathbf{n}},$$

$$\mathbf{H}_2 = \left(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{x}^0 \times \tilde{\mathbf{n}}\right)\alpha + \left(-\tilde{\mathbf{n}} + \mathbf{x}^0 \times \boldsymbol{\sigma}\right)\beta,$$

$$\mathbf{H}_3 = \left(\alpha^2 + \beta^2 - \sigma^2 - \tilde{n}^2\right)\mathbf{x}^0 - 2\left(-\tilde{\mathbf{n}} + \mathbf{x}^0 \times \boldsymbol{\sigma}\right)\alpha - 2\left(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{x}^0 \times \tilde{\mathbf{n}}\right)\beta +$$
$$+ 2\left(\boldsymbol{\sigma} \times \tilde{\mathbf{n}}\right) + 2\left(\mathbf{x}^0 \bullet \boldsymbol{\sigma}\right)\boldsymbol{\sigma} + 2\left(\mathbf{x}^0 \bullet \tilde{\mathbf{n}}\right)\tilde{\mathbf{n}};$$

$$G_0 = \alpha^2 + \beta^2 + \sigma^2 + \tilde{n}^2 - 2\left(\mathbf{x}^0 \bullet \tilde{\mathbf{n}}\right)\alpha + 2\left(\mathbf{x}^0 \bullet \boldsymbol{\sigma}\right)\beta + 2\left(\tilde{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\sigma}\right) \bullet \mathbf{x}^0,$$

$$G_1 = \alpha^2 + \beta^2 - \sigma^2 - \tilde{n}^2 - 2\left(\tilde{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\sigma}\right) \bullet \mathbf{x}^0, \qquad G_2 = -\left(\mathbf{x}^0 \bullet \boldsymbol{\sigma}\right)\alpha + \left(\mathbf{x}^0 \bullet \tilde{\mathbf{n}}\right)\beta,$$

$$G_3 = \alpha^2 + \beta^2 + \sigma^2 + \tilde{n}^2 + 2\left(\mathbf{x}^0 \bullet \tilde{\mathbf{n}}\right)\alpha - 2\left(\mathbf{x}^0 \bullet \boldsymbol{\sigma}\right)\beta + 2\left(\tilde{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\sigma}\right) \bullet \mathbf{x}^0.$$

В решении (7), (42) остались свободными параметры $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; n_1, n_2, n_3; x_1^0, x_2^0$ (x_3^0 определяем из интеграла (23)). Параметры α, β определены соотношениями (34).

При вычислении угловой скорости (19) и скорости (16) точки тела $\boldsymbol{\omega} = c\mathbf{R} + \tilde{\mathbf{n}} \times \mathbf{R} - \boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{u} = b\mathbf{R} - c\boldsymbol{\lambda} + \tilde{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\lambda}$ в них войдут также оставшиеся свободными параметры b, c.

Второе решение. Предположим, что тензор c_{ij} симметричный[2]. Поворотом осей ему можно придать диагональную форму. Тогда система (17) принимает вид

$$\begin{aligned} R_1^{\bullet} &= \left(c_3 R_3 - \sigma_3\right) R_2 - \left(c_2 R_2 - \sigma_2\right) R_3 \,, \\ R_2^{\bullet} &= \left(c_1 R_1 - \sigma_1\right) R_3 - \left(c_3 R_3 - \sigma_3\right) R_1 \,, \\ R_3^{\bullet} &= \left(c_2 R_2 - \sigma_2\right) R_1 - \left(c_1 R_1 - \sigma_1\right) R_2 \,. \end{aligned} \tag{43}$$

Умножая эти уравнения соответственно на $c_1 R_1 - \sigma_1$, $c_2 R_2 - \sigma_2$, $c_3 R_3 - \sigma_3$ и складывая, получим уравнение

$$\left(c_1 R_1 - \sigma_1\right) R_1^{\bullet} + \left(c_2 R_2 - \sigma_2\right) R_2^{\bullet} + \left(c_3 R_3 - \sigma_3\right) R_3^{\bullet} = 0 \,, \tag{44}$$

которое имеет интеграл

$$\frac{1}{c_1}\left(c_1 R_1 - \sigma_1\right)^2 + \frac{1}{c_2}\left(c_2 R_2 - \sigma_2\right)^2 + \frac{1}{c_3}\left(c_3 R_3 - \sigma_3\right)^2 = \mathrm{const} = C \,, \tag{45}$$

где C – постоянная интегрирования.
Заменой

$$c_1 = -D_1 \,, \quad \sigma_1 = \frac{\Lambda_1}{\sqrt{D_2 D_3}} \,, \quad R_1 = \frac{Q_1}{\sqrt{D_2 D_3}} \quad (123) \tag{46}$$

преобразуем уравнения (43) в уравнения Жуковского движения гиростата по инерции

$$D_1 Q_1^{\bullet} = \left(D_2 - D_3\right) Q_2 Q_3 + \Lambda_2 Q_3 - \Lambda_3 Q_2 \quad (123). \tag{47}$$

Интегралы (6) и (45) при указанной замене преобразуются так:

---

[2] Запишем уравнения (17) в развернутом виде

$$R_1^{\bullet} = \left(c_{31} R_1 + c_{32} R_2 + c_{33} R_3 - \sigma_3\right) R_2 - \left(c_{21} R_1 + c_{22} R_2 + c_{23} R_3 - \sigma_2\right) R_3 \equiv \Phi_1\left(R_1, R_2, R_3\right) \quad (123) \,,$$

вычислим частные производные

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial R_1} = c_{31} R_2 - c_{21} R_3 \quad (123)$$

и найдем их сумму

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial R_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial R_2} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial R_3} = \left(c_{23} - c_{32}\right) R_1 + \left(c_{31} - c_{13}\right) R_2 + \left(c_{12} - c_{21}\right) R_3 \,.$$

Очевидно, что если тензор c_{ij} симметричен, эта сумма равна нулю, и система имеет интегрирующий множитель – отличную от нуля постоянную.

$$D_1Q_1^2 + D_2Q_2^2 + D_3Q_3^2 = 2E \quad \left(2E = R^2 D_1 D_2 D_3\right), \qquad (48)$$

$$\left(D_1Q_1 + \Lambda_1\right)^2 + \left(D_2Q_2 + \Lambda_2\right)^2 + \left(D_3Q_3 + \Lambda_3\right)^2 = N^2, \quad \left(N^2 = -CD_1D_2D_3\right). \; (49)$$

Точное решение уравнений (47) с интегралами (48), (49), как известно, без каких-либо ограничений на параметры В. Вольтерра построил посредством эллиптических сигма-функций [12].

Литература

1. Кирхгоф Г. Механика. – М: Изд-во АН СССР, 1962. – 402 С.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1. – М; Л: Гостехиздат, 1948. – 536 С.
3. Ламб Г. Гидродинамика. – М; Л: Гостехиздат, 1947. – 928 С.
4. Мозалевская Г.В., Лесина М.Е. О линейных инвариантных соотношениях уравнений Кирхгофа. – Донецк, 2001. – 25 С. – (Препринт / НАНУ ИПММ; № 01.02)
5. Стеклов В.А. О движении тела в жидкости. – Харьков, 1893. – 234 С.
6. Харламов П.В. О движении в жидкости тела, ограниченого многосвязной поверхностью // Журнал прикл. механики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17-29.
7. Харламов П.В. О решениях уравнений динамики твердого тела // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, № 3. – С. 567-572.
8. Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е. О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3-17.
9. Харламов П.В. Поступательные движения тяжелого твердого тела в жидкости // Прикл. математика и механика. – 1956. – **20**, № 1. – С. 124-129.
10. Чаплыгин С.А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости (статья первая) / Собр. соч.: В 4 т. – М; Л: Гостехтеориздат. – 1948. – Т.1. – С. 136-193.
11. Чаплыгин С.А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости (статья вторая) // Там же.– С. 194-311.
12. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes // Acta math. – 1899. – **22**. – P. 201-358.