

УДК: 539.3

Вовк Л.П., Кисель Е.С.

АНАЛИЗ СПЕКТРА РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ ТЕРМОУПРУГИХ ОБЛАСТЕЙ С НЕГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ*Автомобильно-дорожный институт ГВУЗ**„Донецкий национальный технический университет” г. Горловка*

В данной работе был проведён численный анализ спектра резонансных частот и собственных форм колебаний однородной изотропной упругой и термоупругой областей, в случае, когда сечение представляет собой прямоугольник. Рассматривается зависимость явления краевого резонанса от геометрических характеристик прямоугольника. Проведено исследование влияния упругих и термоупругих характеристик материалов на спектр собственных частот.

Ключевые слова: термоупругая прямоугольная область; краевой резонанс; собственные частоты.

In this work the numerical analysis of spectrum of resonance frequencies and own forms of vibrations of homogeneous isotropic were conducted elastic and thermoelastic areas, in the case when a section is a rectangle. Dependence of the phenomenon of regional resonance is examined on geometrical descriptions of rectangle. Research of influence of elastic and thermoelastic descriptions of some isotropic materials is conducted on the spectrum of eigenfrequencies.

Keywords: rectangular thermoelastic area; regional resonance; eigenfrequencies.

Известно, что наличие концентрации напряжения может быть причиной разрушения материала, следовательно, анализ концентрации напряжения является весьма важным и всегда актуальным вопросом. Целью данной работы служит обобщение алгоритма метода суперпозиции для решения первой краевой задачи термоупругости в прямоугольной области с определением характера напряженно-деформированного состояния в окрестности сингулярных угловых точек.

Рассмотрим гармонические симметричные колебания однородной термоупругой области, сечение которой представляет прямоугольную область $D = \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) : |\tilde{x}_1| \leq a; |\tilde{x}_2| \leq b\}$ где \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 - декартовы координаты. На сторонах прямоугольника $\tilde{x}_1 = \pm a; \tilde{x}_2 = \pm b$ задана нормальная нагрузка интенсивности $Q_1(\tilde{x}_1), Q_2(\tilde{x}_2)$ соответственно, которая гармонично изменяется во времени с

частотой ω . Предусматривается, что данная область имеет свободный теплообмен с окружающей средой. Безразмерные амплитудные характеристики перемещений $U_i(x,y), i=1,2$ и прироста температуры $\Theta(x,y)$ определяются системой дифференциальных уравнений связанной термоупругости в частных производных (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y}\right) &= \frac{\gamma T_0}{\mu} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\rho a^2 \omega^2}{\mu} U_1 \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y}\right) &= \frac{\gamma T_0}{\mu} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \frac{\rho a^2 \omega^2}{\mu} U_2 \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} - \frac{a^2 \omega i}{\chi} \Theta - \frac{\delta a^2 i \omega}{T_0} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

где $x = \frac{\tilde{x}_1}{a}$; $y = \frac{\tilde{x}_2}{a}$; $U_1 = \frac{\tilde{U}_1}{a}$; $U_2 = \frac{\tilde{U}_2}{a}$; $\Theta = \frac{\tilde{\Theta}}{T_0}$; $\sigma_{ij} = \frac{\tilde{\sigma}_{ij}}{\mu}$; $\tilde{\Theta} = T - T_0$,

$\tilde{U}_i, (i=1,2)$ - компоненты вектора перемещений; $\tilde{\Theta}$ - прирост температуры; T - абсолютная температура точек тела; T_0 - температура тела в недеформированном и ненапряженном состоянии; ρ - плотность; λ, μ - параметры Ляме, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_i$; $\delta = \frac{\gamma T_0}{\lambda_0}$; $\chi = \frac{\lambda_0}{c_\varepsilon}$ где α_i - коэффициент линейного термического расширения; λ_0 - коэффициент теплопроводности; c_ε - удельная теплоемкость при постоянной деформации.

Граничные условия сформулированы в безразмерном виде:

Если $x = \pm 1$:
$$2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) - \frac{1+\nu}{1-2\nu} a \Theta \right) = \frac{1}{\mu} \sigma_{11} = q_1(y)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{1}{\mu} q_2 = 0; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x} + a \frac{\alpha}{\lambda_1} \Theta = 0. \quad (2)$$

Если $y = \pm \eta$, $\eta = \frac{b}{a}$:
$$2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) - \frac{1+\nu}{1-2\nu} a \Theta \right) = \frac{1}{\mu} \sigma_{22} = q_2(x)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \sigma_{12} = 0; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y} + a \frac{\alpha}{\lambda_1} \Theta = 0, \quad \text{где } \lambda_1 - \text{приведённый коэффициент}$$

теплопроводности; α - коэффициент теплоотдачи.

В данной работе, используя приём, предложенный в работе А.В. Белокопя [1], краевую задачу (1)-(2) сведём к системе интегральных уравнений. Непосредственное удовлетворение граничных условий (2) не даёт возможности определять в явном виде произвольные постоянные, входящие в общее решение задачи. Поэтому, следуя работам [1-3], вместо совокупности граничных условий (2) рассмотрим более простые граничные условия, которые конечно, не отвечают исходной краевой задаче, однако позволяют аналитически определить произвольные постоянные в общем решении системы (1). Естественно в правых частях вспомогательных граничных условий будут стоять неизвестные функции, удовлетворяющие лишь общим требованиям (чётность, непрерывность, дифференцируемость, и т.п.). Возврат к исходным граничным условиям даст возможность определить эти введённые функции и в конечном итоге получить решение исходной краевой задачи. Подробно алгоритм исследования рассматривается в работах [4-7].

Начнём численное исследование с задачи зависимости явления краевого резонанса от внешних размеров сечения (параметр $\eta = L^{-1}$). На рисунках 1-3 приведены графики изменения резонансных частот от параметра L для свинца(**Pb**), стали(**St**) и титана(**Ti**). Прерывистой линией отмечены графики зависимости частот от параметра L для упругого, а сплошной, соответственно для термоупругого материала. Следует отметить количественное изменение (увеличение) частот при увеличении модуля сдвига для материалов **Pb-St-Ti**. Графические зависимости для упругого материала соответствуют результатам, полученным в работе Гринченко В.Г. [8]. Кроме того, в упругом случае более выражены признаки краевого резонанса (наличие ярко выраженного плато на спектре (рис.1-3)), а в термоупругом случае происходит их «смазывание».

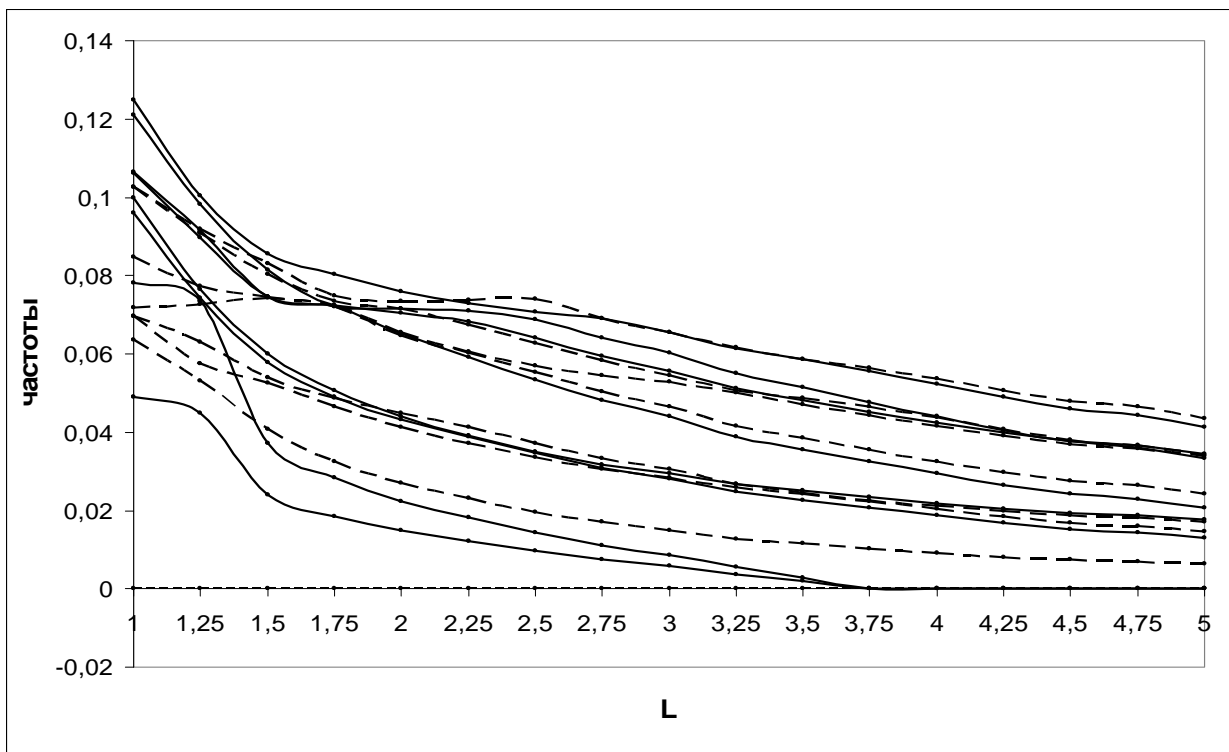


Рис.1. Спектр резонансных частот для сечения Pб

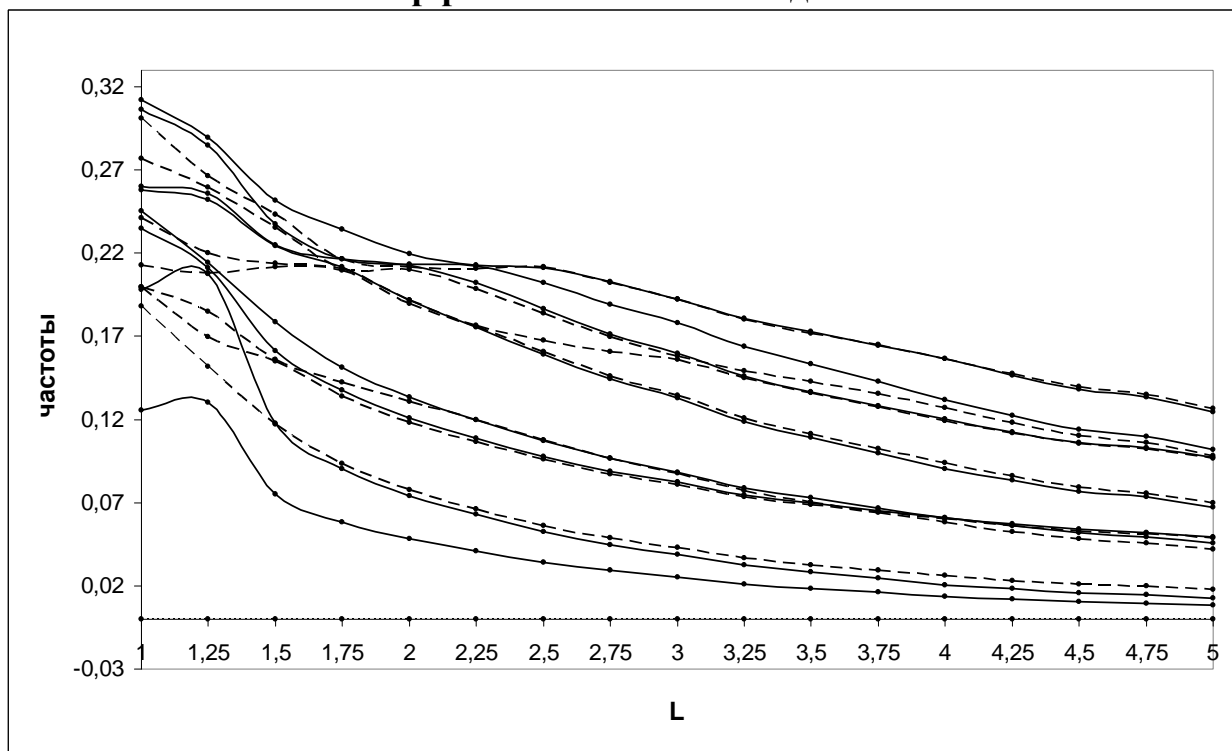


Рис.2. Спектр резонансных частот для сечения St

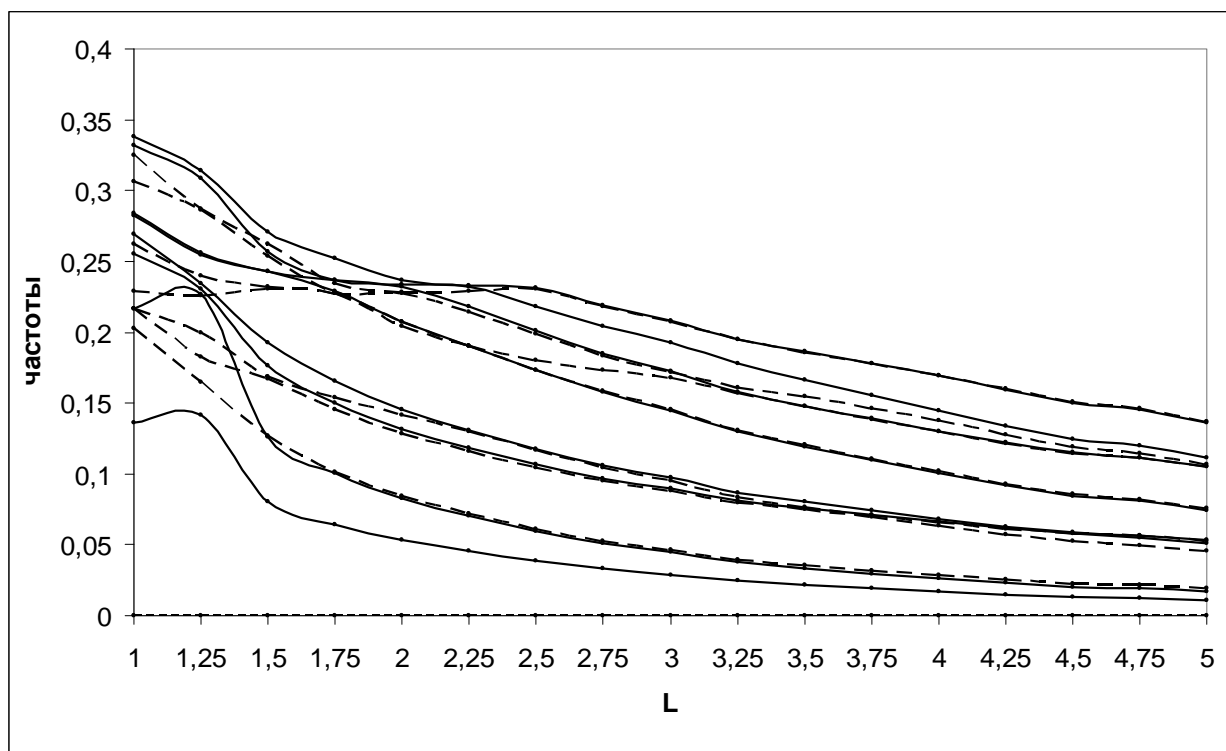


Рис.3. Спектр резонансных частот для сечения Ti

В таблицах 1-3 представлена погрешность вычисления резонансных частот для термоупругих материалов **Pb, St, Ti**, из которой следует, что погрешность вычислений уменьшается при увеличении параметра L , а также при увеличении жёсткости используемого материала.

**Погрешность вычисления резонансных частот
для термоупругого материала (свинец)**

Таблица 1

№ частоты	L=1	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,25	4,50	4,75	5,00
4	18,45	27,74	-10,28	-14,90	-20,54	-27,40	-37,78	-53,04	-74,20	-	-	-	-	-	-	-	-
5	27,42	22,48	8,82	5,31	4,58	4,15	3,08	0,99	-1,08	-4,23	-6,89	-8,55	-8,83	-9,34	-10,12	-10,66	-12,03
6	30,23	17,57	10,31	4,09	-1,77	-5,25	-6,47	-5,30	-3,56	-0,66	1,72	3,04	2,95	2,88	2,80	2,77	2,71
7	32,24	19,03	0,32	0,17	0,67	-1,50	-3,36	-4,66	-5,72	-7,10	-8,13	-9,27	-10,56	-12,05	-13,60	-14,51	-16,47
8	20,49	15,42	0,03	0,11	6,92	11,38	11,16	8,29	5,08	1,91	1,88	1,85	1,82	1,80	1,74	0,69	-1,47
9	15,17	7,67	1,52	-1,50	-0,08	5,15	8,92	9,32	9,48	8,01	4,94	2,44	0,69	-0,45	-1,14	-0,39	1,25
10	17,73	8,49	3,00	6,68	3,10	-1,12	-4,62	0,02	0,06	-0,26	-0,30	-1,41	-2,49	-3,51	-4,38	-4,81	-5,60

**Погрешность вычисления резонансных частот
для термоупругого материала (сталь)**

Таблица 2

№ частоты	L=1	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,25	4,50	4,75	5,00
4	5,12	26,72	0,62	-3,21	-4,29	-5,46	-6,94	-8,66	-10,41	-13,18	-15,62	-18,61	-27,72	-27,09	-32,47	-35,92	-44,06

5	15,07	19,76	3,96	2,79	2,33	2,06	1,85	1,70	1,58	1,47	1,40	1,73	4,09	6,16	7,00	7,42	8,16
6	18,73	13,76	12,63	5,93	1,79	-0,14	-0,65	-0,16	0,65	2,00	3,04	3,71	1,31	1,26	1,20	1,18	1,14
7	17,57	17,46	5,72	0,91	1,22	-0,38	-0,81	-1,18	-1,46	-1,81	-2,05	-2,31	-3,91	-2,94	-3,27	-3,45	-3,86
8	7,26	14,01	4,95	2,59	9,92	12,72	10,16	6,23	2,42	0,67	0,62	0,59	0,64	0,54	0,53	0,52	0,51
9	9,63	9,00	0,94	2,56	1,59	6,29	9,08	10,29	11,20	9,11	6,79	5,09	3,55	3,59	3,39	3,36	3,39
10	3,51	7,90	3,22	7,76	3,59	0,97	-0,37	0,13	0,13	0,20	0,61	-0,33	-0,24	-0,88	-1,10	-1,22	-1,42

**Погрешность вычисления резонансных частот
для термоупругого материала (титан)**

Таблица 3

№ частоты																		
	L=1	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,25	4,50	4,75	5,00	
4	6,71	27,20	-0,59	-1,05	-1,54	-2,06	-2,69	-3,41	-4,12	-5,19	-6,10	-7,16	-8,42	-9,91	-11,47	-12,40	-14,42	
5	15,00	20,68	5,16	2,97	2,42	2,09	1,85	1,67	1,54	1,41	1,33	1,89	4,79	7,80	9,32	9,85	10,85	
6	19,46	14,97	12,38	6,92	2,82	0,92	0,47	1,05	1,96	3,45	4,63	5,21	3,54	1,65	1,08	1,05	1,00	
7	18,92	11,07	5,20	0,56	1,45	-0,06	-0,32	-0,51	-0,65	-0,81	-0,91	-1,03	-1,15	-1,29	-1,42	-1,51	-1,68	
8	7,76	6,37	4,53	3,86	10,89	12,68	10,24	6,45	2,74	0,48	0,42	0,37	0,34	0,31	0,29	0,29	0,28	
9	7,62	7,38	1,05	3,75	2,60	7,79	8,98	10,12	11,06	9,58	7,35	5,70	4,73	4,29	4,15	4,15	4,26	
10	3,84	8,57	3,05	7,01	3,51	1,55	0,37	0,20	0,20	0,14	0,72	-0,06	-0,19	-0,33	-0,44	-0,50	-0,60	

Можно сформулировать следующие выводы относительно особенностей спектра резонансных частот, справедливые для упругих и термоупругих областей и подтвержденные результатами численного анализа.

Во-первых, термоупругость материала существенно усложняет природу краевого резонанса, т.к. плато не так ярко выражены.

Во-вторых, следует отметить, что при изменении упругих характеристик материала (в частности увеличения его жёсткости) влияние «эффекта термоупругости» становится менее выраженным, что подтверждает сравнительная характеристика графиков изменения резонансных частот (рис. 1-3). Для наиболее «жёсткого» материала из трёх рассмотренных (титана) плато в термоупругом и упругом случаях практически одинаковы (рис.3). Данный вывод подтверждается и погрешностью вычисления резонансных частот для титана (табл.3).

Литература:

1. Белоконь А.В. Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 233. – №1. – С. 56-59.

2. Вовк Л.П., Паригіна О.О. Застосування модифікованого методу Бубнова-Гальоркіна при розв'язку деяких динамічних задач теорії пружності // Тези доповідей VII-ї Міжнар. наук. конф. ім. акад. М.Кравчука. 14-16 травня 1998р. – Київ, 1998. – С. 97.
3. Вовк Л.П. Динамические задачи для тел сложной структуры. – Ростов-на-Дону: Ростовский гос. строит. ун-т, 2003. – 169с.
4. Вовк Л.П., Кисіль К.С. Якісний аналіз особливостей концентрації термічних напружень у деталях з нерегулярною границею // Вісті автомобільно-дорожнього інституту: Науково-виробничий збірник / АДІ ДонНТУ, Горлівка. – 2009. – №1 (8). – С.13-24.
5. Вовк Л.П., Кисіль К.С. Розв'язання крайових задач термопружних областей з негладкою границею. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. – Том 14. – №4. – С.176-180.
6. Вовк Л.П., Кисель Е.С. Асимптотический метод исследования краевых задач теории термоупругости в областях с негладкой границей. – Материалы X-й Международной научно-практической конференции «Методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике». – 26 февраля 2010г. – Новочеркасск: ЮРГТУ(НПИ). – 2010. – С.4-6.
7. Соболев Б.В., Вовк Л.П., Кисель Е.С. Обобщение метода суперпозиции решения краевых задач теории термоупругости для тел с нерегулярной границей // «Инновация, экология и ресурсосберегающие технологии на предприятиях машиностроения, авиастроения, транспорта и сельского хозяйства» Труды IX Международной научно-технической конференции. – Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ, 2010 – С. 465-469.
8. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 283с.