УДК 539.3

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА СУПЕРПОЗИЦИИ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С НЕРЕГУЛЯРНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Соболь Б.В.
Россия, Донской государственный технический университет
Л.П. Вовк, Е.С. Кисель,
Украина, „Донецкий национальный технический университет”
Автомобильно-дорожный институт ГВУЗ

The task of thermodynamics deformation of details of vehicles the cut of which has irregular points is examined, that predetermines the concentration of tensions, which determines durability of detail on the whole. The analysis of features of the tensely deformed consisting is conducted of environs of irregular points of scopes of area taking into account influence of moving on the local concentration of tensions. The mathematical model of task includes the system of differential equalizations of motion, maximum terms on the lateral surface of detail to the cut. The analytical decision of task is built by modification of method of superposition.

Ранее в работах [1,2] была построена модификация метода суперпозиции для исследования краевых задач гармонических колебаний упругих изотропных областей с негладкой границей. Относительно распространения и обобщения этого метода на термоупругие области, на данное время информация отсутсвует. Целью данной работы является построение нового метода решения краевых задач колебаний конечных изотропных термоупругих областей с нерегулярной границей, который строится на асимптотическом анализе поведения неизвестных функций в сингулярных точках границы. Это дает возможность предложить эффективный алгоритм решения определяющей системы интегральных уравнений, который может быть применен для широкого класса краевых задач эллиптического типа.

Рассмотрим постоянные симметричные колебания однородной термоупругой области, сечение которой представляется в виде прямоугольной области $D=\left\{\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\right):\left|\tilde{x}_1\right|\le a;\left|\tilde{x}_2\right|\le b\right\}$ где $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2$ – декартовые координаты. На сторонах прямоугольника $\tilde{x}_1=\pm a;\ \tilde{x}_2=\pm b$ задана нормальная нагрузка интенсивности $Q_1\left(\tilde{x}_1\right),\ Q_2\left(\tilde{x}_2\right)$ соответственно, что гармонично изменяется во времени с частотой ω. Предусматривается, что данная область имеет свободный теплообмен с окружающей средой.

Безразмерные амплитудные характеристики перемещений $U_i\left(x,y\right), i=1,2$ и прирост температуры $\Theta\left(x,y\right)$ определяются системой дифференциальных уравнений в частных производных [3]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}+\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\gamma T_0}{\mu}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x}-\frac{\rho a^2\omega^2}{\mu}U_1 \\
\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}+\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\gamma T_0}{\mu}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial y}-\frac{\rho a^2\omega^2}{\mu}U_2 \qquad (1)\\
\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}-\frac{a^2\omega i}{\chi}\Theta-\frac{\delta a^2 i\omega}{T_0}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)=0
\end{gathered}$$

де $x=\dfrac{\tilde{x}_1}{a}$; $y=\dfrac{\tilde{x}_2}{a}$; $U_1=\dfrac{\tilde{U}_1}{a}$; $U_2=\dfrac{\tilde{U}_2}{a}$; $\Theta=\dfrac{\tilde{\Theta}}{T_0}$; $\sigma_{ij}=\dfrac{\tilde{\sigma}_{ij}}{\mu}$; $\tilde{\Theta}=T-T_0$,

$\tilde{U}_i,\left(i=1,2\right)$ – компоненти вектора перемещений; $\tilde{\Theta}$ - прирост температуры;

T – абсолютная температура точек тела; T_0 – температура тела в недеформированном и ненапряженном состоянии; ρ – плотность; λ,μ – параметры Ламе, $\gamma=\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha_t$; $\delta=\dfrac{\gamma T_0}{\lambda_0}$;

$\chi=\dfrac{\lambda_0}{c_\varepsilon}$, где α_t – коэффициент линейного термического расширения; λ_0 – коэффициент теплопроводности; c_ε – удельная теплоёмкость при постоянной деформации.

Граничные условия сформулированы в безразмерном виде:

Если $x=\pm1$:
$$2\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{3\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)-\frac{1+\nu}{1-2\nu}a\Theta\right)=\frac{1}{\mu}\sigma_{11}=q_1\left(y\right)$$
$$\frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{\partial U_2}{\partial x}=\frac{1}{\mu}q_2=0;\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial x}+a\frac{\alpha}{\lambda_1}\Theta=0. \qquad (2)$$

Если $y=\pm\eta$, $\left(\eta=\frac{b}{a}\right)$:
$$2\left(\frac{\partial U_2}{\partial y}+\frac{3\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)-\frac{1+\nu}{1-2\nu}a\Theta\right)=\frac{1}{\mu}\sigma_{22}=q_2\left(x\right)$$
$$\frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{\partial U_2}{\partial x}=\frac{1}{\mu}\sigma_{12}=0;\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y}+a\frac{\alpha}{\lambda_1}\Theta=0$$

λ_1 - приведённый коэффициент теплопроводности; α - коэффициент теплоотдачи.

Система дифференциальных уравнений (1) и граничные условия (2) формулируют соответствующую краевую задачу относительно компонент вектора перемещений $\tilde{U}_i,\left(i=1,2\right)$.

Применяя методику модифицированного метода суперпозиции для получения системы интегральных уравнений, рассмотрим вспомогательную задачу, которая характеризуется системой уравнений (1) и следующими граничными условиями на границе прямоугольника:

$$U_1(\pm 1, y) = \pm f_1(y); \qquad U_2(x, \pm\eta) = \pm f_2(x)$$

$$\sigma_{12}(\pm 1, y) = 0; \qquad \sigma_{12}(x, \pm\eta) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = f_3(y), \text{ если } x = \pm 1; \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y} = f_4(x), \text{ если } y = \pm\eta.$$

Учитываем, что $f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4(x)$ – неизвестные функции, причём $f_1(y) = f_1(-y)$, $f_2(x) = f_2(-x)$, $f_3(y) = f_3(-y)$, $f_4(x) = f_4(-x)$, что следует из характера граничных условий (3). Вспомогательная краевая задача (1), (3) не отвечает, естественно начальной граничной задаче, но допускає аналитическое решение и позволяет, во-первых, удовлетворить часть начальных граничных условий и, во-вторых, выразить все характеристики начальной задачи через коэффициенты Фурье неизвестных функций $f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4(x)$.

Решая вспомогательную задачу (1)-(3) и принимая к сведению не использованные граничные условия (2), приведём задачу к системе интегральных уравнений:

$$\sum_{\gamma=1}^{4} L_{m\gamma} f_\gamma = Q_\gamma, \ m = 1,2,3,4; \text{ де, } Q_\alpha = q_\alpha, \ \gamma = \alpha = 1,2; \ Q_\beta = -\frac{f_\beta}{T}, \ \gamma = \beta = 3,4. \tag{4}$$

Операторы $L_{m\gamma}$ определяются по формулам:

$$L_{11} f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{\Omega^2} \Delta_{11k} \cos\alpha_k (y-\eta) \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_{1k} \cos\alpha_k (\xi-\eta) d\xi + (E_1+1) k_1 ctg k_1 \frac{1}{2\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_{1k}(\xi) d\xi$$

$$L_{12} f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\beta_j}{\Omega^2} \Delta_{12j} \int_{-1}^{1} f_{2j} \cos\beta_j (\xi-1) d\xi + (E_1-1) k_2 \frac{\cos(k_2 y)}{\sin(k_2\eta)} \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f_{2j}(\xi) d\xi \text{ и т.д.}$$

Разложив гиперболические и тригонометрические функции, которые входят в структуру операторов $L_{\alpha\gamma}$ по тригонометрическим функциям $\cos\alpha_k (y-\eta)$, $\sin\alpha_k (y-\eta)$, $\cos\beta_j (x-1)$, $\sin\beta_j (x-1)$, приведём (4) к бесконечной системе алгебраических уравнений для определения коэффициентов Фурье $f_{1k}, f_{2j}, f_{3k}, f_{4j}$. Для эффективного решения системы исследуем поведение функций $f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4(x)$ в угловых точках прямоугольника. Допустим, что функции $f_1(\xi), f_2(\xi)$ непрерывные в данной области, а их производные имеют особенность в угловых точках, т. е. $f_1'(\xi) \underset{\xi\to\pm\eta}{\longrightarrow} \pm A(\eta \mp \xi)^{\lambda-1}$; $f_2'(\xi) \underset{\xi\to\pm 1}{\longrightarrow} \pm B(1 \mp \xi)^{\lambda-1}$;

функции $f_3(\xi), f_4(\xi)$ имеют особенность в угловых точках, т. е.

$f_3\left(\xi\right)\underset{\xi\to\pm\eta}{\longrightarrow}\pm C\left(\eta\mp\xi\right)^{\beta-1}$; $f_4\left(\xi\right)\underset{\xi\to\pm1}{\longrightarrow}\pm D\left(1\mp\xi\right)^{\beta-1}$. λ,β - параметры, которые характеризуют особенности функций $f_1\left(\xi\right), f_2\left(\xi\right)$, $f_3\left(\xi\right)$, $f_4\left(\xi\right)$, а A, B, C, D - произвольные постоянные. Проводим асимптотический анализ левых частей СИУ(4) при приближении к угловой точке. Положим $T=\dfrac{\alpha}{\lambda_1}a$. Получим:

$$L_{11}f_1+L_{12}f_2+L_{13}f+L_{14}f=\frac{2E_1}{\left(E_1+1\right)\eta}A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_k\left(\eta-y\right)}{\alpha_k^{\lambda}}+\frac{2E_1}{\left(E_1+1\right)}B\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j\left(\eta-y\right)}}{\beta_j^{\lambda}}-\left(\eta-y\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j\left(\eta-y\right)}}{\beta_j^{\lambda-1}}\right)+$$

$$+\frac{E_1\Theta_1}{\left(E_1+1\right)\eta}C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_k\left(\eta-y\right)}{\alpha_k^{\beta+1}}+\frac{\Theta_1}{\left(E_1+1\right)}D\left(E_1\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j\left(\eta-y\right)}}{\beta_j^{\beta}}+\left(\eta-y\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j\left(\eta-y\right)}}{\beta_j^{\beta+1}}\right)=0$$

$$L_{21}f_1+L_{22}f_2+L_{23}f_3+L_{24}f_4=\frac{2E_1}{\left(E_1+1\right)\eta}A\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\lambda}}-\left(1-x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\lambda-1}}\right)+$$

$$+\frac{2E_1}{\left(E_1+1\right)}B\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos\beta_j\left(1-x\right)}{\beta_j^{\lambda}}+$$

$$+\frac{\Theta_1}{\left(E_1+1\right)\eta}C\left(E_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta+1}}+\left(1-x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta+1}}\right)+\frac{E_1\Theta_1}{\left(E_1+1\right)}D\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos\beta_j\left(1-x\right)}{\beta_j^{\beta+1}}=0$$

$$L_{31}f_1+L_{32}f_2+L_{33}f_3+L_{34}f_4=\frac{-\Omega_1T}{\left(E_1+1\right)\eta}A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_k\left(\eta-y\right)}{\alpha_k^{\alpha+1}}+C\frac{1}{\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\alpha_k\left(\eta-y\right)}{\alpha_k^{\beta+1}}\left(T+1\right)\right)+$$

$$+\frac{-\Omega_1T}{\left(E_1+1\right)}B\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\alpha+1}}+\left(\eta-y\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta}}\right)+TD\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta}}=0$$

$$L_{41}f_1+L_{42}f_2+L_{43}f_3+L_{44}f_4=\frac{-\Omega_1T}{\left(E_1+1\right)\eta}A\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\alpha+1}}+\left(1-x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta}}\right)+T\frac{1}{\eta}C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta}}+$$

$$+\frac{-\Omega_1T}{\left(E_1+1\right)}B\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos\beta_j\left(1-x\right)}{\beta_j^{\alpha+1}}+D\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\beta_j\left(1-x\right)}{\beta_j^{\beta+1}}\left(T+1\right)\right)=0,$$

после суммирования рядов получим систему для определения параметров λ,β:

$$\begin{cases}\sin\dfrac{\pi\lambda}{2}A+\lambda B=0\\ \lambda A+\sin\dfrac{\pi\lambda}{2}B=0\\ T_1D\beta=0\\ T_2C\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\dfrac{\pi\lambda}{2}A+\lambda B=0\\ \lambda A+\sin\dfrac{\pi\lambda}{2}B=0\end{cases}$$

Из условия существования нетривиального решения первых двух уравнений данной системы получим характеристическое уравнение для определения параметра λ:

$$\lambda^2-\sin^2\frac{\pi\lambda}{2}=0 \qquad (5)$$

Характеристическое уравнение (5) имеет один действительный корень $\lambda_0 = 1$ и бесконечное множество комплексных корней $\lambda_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ [1, 2]. Естественно, необходимо учитывать лишь то комплексные корни, для которых $\operatorname{Re} \lambda_k > 1$. Как видим, характер особенности механического поля в угловой точке не зависит от упругих параметров области сечения. Учитывая механическое содержание функций $f_1(\xi), f_2(\xi)$ и требуя ограниченности энергии всей системы приходим к выводу, что при построении асимптотики решения надо учитывать только один действительный корень $\lambda_0 = 1$ и огромное количество комплексных корней $\lambda_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ с положительной действительной частью. Два последних уравнения системы дают основание говорить, что температура не имеет особенности в угловых точках области, поскольку $D = C = 0$.

После определения дополнительных функций $f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4(x)$ из системы интегральных уравнений (4) имеем возможность найти все неизвестные краевой задачи (1)-(2) и все характеристики волнового поля. Надо отметить, что нахождение показателей локальной особенности λ дает возможность исследовать напряженно-деформированное состояние во всей области D, включая ее угловые точки. Это в свою очередь приводит к эффективной оценке концентрации динамических напряжений в окрестности этих точек, что обусловливает прочностные характеристики всей области.

Литература

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. Думка, 1981. – 284с.
2. Вовк Л.П. Исследование динамических эффектов, возникающих при вибронагружении стыковых паяных соединений // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2004. – №1. – С. 60-64.
3. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. — Киев: Наукова думка, 1976. — 312 с.