

**ІНТЕНСИВНІСТЬ ДИНАМІЧНОЇ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ
У ЗАДАЧАХ СТАЛИХ КОЛИВАНЬ
КУСКОВО-НЕОДНОРІДНИХ ТЕРМОПРУЖНИХ ОБЛАСТЕЙ**

Вовк Л.П., д.т.н., Кисіль К.С., ас.

АДІ ДВНЗ ДонНТУ, м. Горлівка, Україна

Розглядається задача динамічної термопружної деформації складених тіл, переріз яких має сингулярні точки, що зумовлює концентрацію напружень, яка і визначає міцність деталі в цілому. Проведено аналіз особливостей напружено-деформованого стану в околі нерегулярних точок границі області з урахуванням впливу температурних напружень на локальну концентрацію напружень. Аналітичний розв'язок задачі будується за допомогою модифікації методу суперпозиції, що зводить задачу до системи сингулярних інтегральних рівнянь з відомою асимптотикою невідомих.

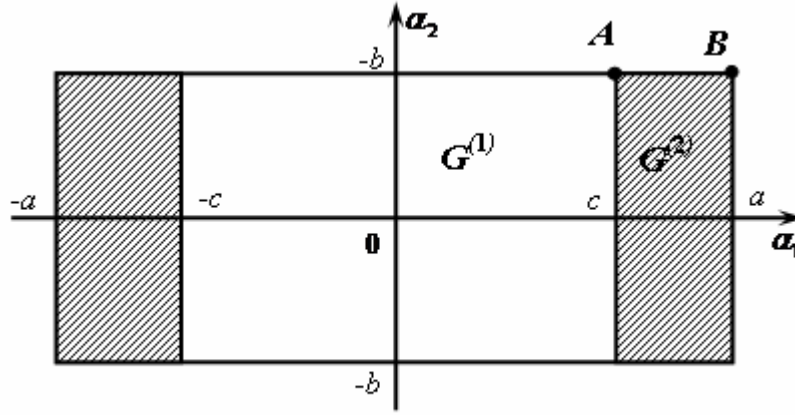
Вступ

Визначення характеру поведінки напружено-деформованого стану в околі нерегулярних точок зовнішніх і внутрішніх границь кусково-неоднорідних тіл дозволяє при чисельному аналізі найкращим чином апроксимувати рішення і побудувати інтегральний алгоритм його знаходження. Питанням дослідження рішень задач теорії пружності у околі кутових точок, які належать лініям розділу двох різнорідних середовищ присвячено досить багато наукових публікацій, серед яких відзначимо роботи [1-4]. Характер локальної особливості по напруженням у сингулярних точках сполучення трьох і чотирьох середовищ розглядалися у [5-6] отримані у цих роботах результати дають змогу, по-перше, розповсюдити відомий метод суперпозиції [7] на кусково-неоднорідні і термопружні області і, по-друге, дослідити вплив термічних параметрів на локальну концентрацію напружень у нерегулярних зонах області.

Мета роботи

За методом суперпозиції рішення задачі представляється у вигляді суми декількох послідовних частинних рішень, які мають конкретні властивості симетрії. При цьому передбачається, що поверхня пружного тіла утворена частинами координатних поверхонь різних сімейств в ортогональних системах координат.

Метою даної роботи служить розповсюдження алгоритму методу суперпозиції для розрахунку термопружних кусково-неоднорідних тіл з визначенням характеру динамічного НДС у околу сингулярних кутових точок областей, застосування розробленої схеми для чисельно-аналітичного розрахунку параметрів локальної особливості (ПЛО) по напруженням і аналіз впливу температурних ефектів на ПЛО. При цьому, якщо враховувати локальний характер концентрації напружень та ПЛО, можливо розповсюдити отримані нижче результати на відмінні від розгляданих у даній роботі геометричні конфігурації областей.



Мал.1 Геометрія перетину тіла

Постановка задачі

Нехай переріз деталі – деяка прямокутна область, яка займає в системі координат $\alpha_1 O \alpha_2$ область $D = G^{(1)} \cup G^{(2)}$ (мал.1). Области $G^{(m)}$ ($m = 1, 2$) зістиковано одна з одною. Вони є ізотропними, в загальному випадку мають різні пружні константи та визначаються нерівностями

$$G^{(1)} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : |\alpha_1| \leq c; |\alpha_2| \leq b\}, G^{(2)} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \in [-a, -c] \cup [c, a]; |\alpha_2| \leq b\},$$

де α_1, α_2 – декартові координати.

Нехай на границі області $\alpha_1 = \pm a$, $\alpha_2 = \pm b$ задано нормальне навантаження інтенсивності $q_1(\alpha_1)$ та $q_2(\alpha_2)$ відповідно, що гармонійно змінюється в часі з частотою ω . Передбачається, що дана область має вільний теплообмін з навколишнім середовищем. Безрозмірні амплітудні характеристики переміщень $U_i(x, y), i = 1, 2$ і приросту температури $\Theta(x, y)$ визначаються системою рівнянь зв'язаної термопружності в безрозмірних координатах для областей $G^{(1)}$ та $G^{(2)}$ відповідно[8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right) \left(\frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial x \partial y} \right) &= \frac{\gamma^{(m)} T_0}{\mu^{(m)}} \cdot \frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial x} - \frac{\rho^{(m)} a^2 \omega^2}{\mu^{(m)}} U_1^{(m)} \\ \frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right) \left(\frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x \partial y} \right) &= \frac{\gamma^{(m)} T_0}{\mu^{(m)}} \cdot \frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial y} - \frac{\rho^{(m)} a^2 \omega^2}{\mu^{(m)}} U_2^{(m)} \\ \frac{\partial^2 \Theta^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta^{(m)}}{\partial y^2} - \frac{a^2 \omega i}{\chi^{(m)}} \cdot \Theta^{(m)} - \frac{\delta^{(m)} a^2 i \omega}{T_0} \cdot \left(\frac{\partial U_1^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial U_2^{(m)}}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Тут були використані наступні позначення:

$$x = \frac{\alpha_1}{a}; y = \frac{\alpha_2}{a}; U_1^{(m)} = \frac{\tilde{U}_1^{(m)}}{a}; U_2^{(m)} = \frac{\tilde{U}_2^{(m)}}{a}; \Theta^{(m)} = \frac{\tilde{\Theta}^{(m)}}{T_0}; \sigma_{ij}^{(m)} = \frac{\tilde{\sigma}_{ij}^{(m)}}{\mu^{(m)}};$$

$$\tilde{\Theta}^{(m)} = T^{(m)} - T_0$$

$\tilde{U}_i^{(m)}(i, m = 1, 2)$ – компоненти вектора переміщень; $\tilde{\Theta}^{(m)}$ – приріст температури; $T^{(m)}$ – абсолютна температура точок тіла; T_0 – температура тіла у недеформованому і ненапруженому стані; $\rho^{(m)}$ – щільність; $\lambda^{(m)}, \mu^{(m)}$ – параметри Ляме,

$$\gamma^{(m)} = (3\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}) \cdot \alpha_t^{(m)}; \delta^{(m)} = \frac{\gamma^{(m)} T_0}{\lambda_0^{(m)}}; \chi^{(m)} = \frac{\lambda_0^{(m)}}{c_\varepsilon^{(m)}}, \text{ де}$$

$\alpha_t^{(m)}$ – коефіцієнт лінійного термічного розширення; $\lambda_0^{(m)}$ – коефіцієнт теплопровідності; $c_\varepsilon^{(m)}$ – питома теплоємність при постійній деформації.

При формулюванні граничних умов, враховуючи симетрію області, розглянемо напружений стан частини області, розташованої у першій чверті. Вводимо локальну безрозмірну координату

$$\hat{x} = \frac{(\alpha_1 - c)}{a}, \hat{x} \in [0, \delta_2]; \delta_2 = 1 - \delta, \delta = \frac{c}{a}$$

та безрозмірні амплітудні компоненти тензору напруги $\sigma_{\alpha\beta}^{(m)}$, пов'язані з переміщеннями законом Гука

$$\sigma_{11}^{(m)} = C_{11}^{(m)} U_{1,1}^{(m)} + C_{12}^{(m)} U_{2,2}^{(m)}, \quad \sigma_{22}^{(m)} = C_{12}^{(m)} U_{1,1}^{(m)} + C_{11}^{(m)} U_{2,2}^{(m)}, \quad \sigma_{12}^{(m)} = U_{1,2}^{(m)} + U_{2,1}^{(m)}, \quad \text{де}$$

$$C_{11}^{(1)} = 2 + \frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}}, \quad C_{12}^{(m)} = C_{11}^{(m)} - 2.$$

Таким чином, граничні умови задачі запишуться наступним чином в безрозмірному вигляді:

$$\text{в області } \bar{G}^{(1)} = \{(x, y) : |x| \leq \delta; |y| \leq \eta\}$$

$$\sigma_{1\beta}^{(1)}(\delta, y) = r_{21} \sigma_{1\beta}^{(2)}(0, y), \quad U_{\beta}^{(1)}(\delta, y) = U_{\beta}^{(2)}(0, y); \quad \sigma_{22}^{(1)}(x, \eta) = q_2^{(1)}(x), \quad \sigma_{12}^{(1)}(x, \eta) = 0$$

$$\frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}}, \quad \Theta^{(1)} = \Theta^{(2)}, \quad \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial y} + a \frac{\alpha^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} \Theta^{(1)} = 0$$

$$\text{в області } \bar{G}^{(2)} = \{(\hat{x}, y) : 0 \leq \hat{x} \leq \delta_2; |y| \leq \eta\} \quad (2)$$

$$\sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) = q_1^{(2)}(y), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\delta_2, y) = 0; \quad \sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = q_2^{(2)}(\hat{x}), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = 0$$

$$\frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial y} + a \frac{\alpha^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} \Theta^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}} + a \frac{\alpha^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} \Theta^{(2)} = 0, \quad \text{де } q_{\beta}^{(m)} = \frac{q_{\beta}}{\mu^{(m)}}, \quad \eta = \frac{b}{a},$$

$$r_{12} = \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}}, \quad \beta = 1, 2; \quad \lambda_1^{(m)} - \text{приведений коефіцієнт теплопровідності; } \alpha^{(m)} - \text{коефіцієнт тепловіддачі.}$$

Реалізація методу суперпозиції

Маємо наступні вирази для загального розв'язку в областях $\bar{G}^{(m)}(m = 1, 2)$ [4]

$$\begin{aligned} U_1^{(1)} &= \bar{H}^{(1)} sh(t^{(1)} x) \cos \alpha^{(1)}(y - \eta) + \bar{R}^{(1)} ch(r^{(1)} y) \sin \chi^{(1)}(x - \delta) \\ U_2^{(1)} &= H^{(1)} ch(t^{(1)} x) \sin \alpha^{(1)}(y - \eta) + R^{(1)} sh(r^{(1)} y) \cos \chi^{(1)}(x - \delta) \\ \Theta^{(1)} &= K^{(1)} ch(t^{(1)} x) \cos \alpha^{(1)}(y - \eta) + L^{(1)} ch(r^{(1)} y) \cos \chi^{(1)}(x - \delta) \\ U_1^{(2)} &= (\bar{H}^{(2)} sh(t^{(2)} \hat{x}) + \bar{Q}^{(2)} ch(t^{(2)} \hat{x})) \cos \alpha^{(1)}(y - \eta) + \bar{R}^{(2)} ch(r^{(2)} y) \sin \chi^{(2)}(\hat{x} - \delta) \\ U_2^{(2)} &= (H^{(2)} ch(t^{(2)} \hat{x}) + Q^{(2)} sh(t^{(2)} \hat{x})) \sin \alpha^{(1)}(y - \eta) + R^{(2)} sh(r^{(2)} y) \cos \chi^{(2)}(\hat{x} - \delta) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Theta^{(2)} = \left(K^{(2)} ch(t^{(2)} \hat{x}) + M^{(2)} sh(t^{(2)} \hat{x}) \right) \cos \alpha^{(1)} (y - \eta) + L^{(2)} ch(r^{(2)} y) \cos \chi^{(2)} (\hat{x} - \delta)$$

В якості значень параметрів $\alpha^{(1)}$, $\chi^{(m)}$ обираємо послідовності чисел [7]: $\alpha_k = \frac{k\pi}{\eta}$,

$$\chi_j^{(1)} = \frac{j\pi}{\delta}, \quad \chi_j^{(2)} = \frac{j\pi}{\delta_2}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, \dots$$

Підставляємо вирази (3) в системи рівнянь руху і теплопровідності (1) та (2). Отримаємо дві системи однорідних рівнянь відносно довільних сталих $\bar{H}^{(m)}$, $H^{(m)}$, $\bar{R}^{(m)}$, $R^{(m)}$, $\bar{Q}^{(m)}$, $Q^{(m)}$, $K^{(m)}$, $L^{(m)}$, $M^{(m)}$.

Позначимо через $t_{\alpha k}^{(m)}$ та $r_{\alpha j}^{(m)}$ – корені характеристичних рівнянь ($\alpha = 1, 2, 3$), отримані за умови існування нетривіального розв'язку двох отриманих однорідних систем рівнянь:

$$t_1^{(m)2} = \frac{\left((C_{11}^{(m)} - 1) \Omega_2^{(m)} - \Omega^{(m)2} + 2\alpha^{(1)2} + \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} + 2\alpha^{(1)2} (C_{11}^{(m)} - 1) + S^{(m)} \right)}{2C_{11}^{(m)}}$$

$$t_2^{(m)2} = \alpha^{(1)2} - \Omega^{(m)2}$$

$$t_3^{(m)2} = \frac{\left((C_{11}^{(m)} - 1) \Omega_2^{(m)} - \Omega^{(m)2} + 2\alpha^{(1)2} + \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} + 2\alpha^{(1)2} (C_{11}^{(m)} - 1) - S^{(m)} \right)}{2C_{11}^{(m)}}$$

$$r_1^{(m)2} = \frac{\left((C_{11}^{(m)} - 1) \Omega_2^{(m)} - \Omega^{(m)2} + 2\chi^{(m)2} + \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} + 2\chi^{(m)2} (C_{11}^{(m)} - 1) + S^{(m)} \right)}{2C_{11}^{(m)}}$$

$$r_2^{(m)2} = \chi^{(m)2} - \Omega^{(m)2}$$

$$r_3^{(m)2} = \frac{\left((C_{11}^{(m)} - 1) \Omega_2^{(m)} - \Omega^{(m)2} + 2\chi^{(m)2} + \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} + 2\chi^{(m)2} (C_{11}^{(m)} - 1) - S^{(m)} \right)}{2C_{11}^{(m)}}$$

де $S^{(m)2} = \Omega^{(m)4} + \Omega^{(m)2} (2\Omega_2^{(m)} + 2(C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} - 2\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}) + \Theta_1^{(m)2}\Omega_1^{(m)2} + 2(C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)}\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} + 2\Omega_2^{(m)}\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} + (C_{11}^{(m)} - 1)^2\Omega_2^{(m)2} + 2(C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)2} + \Omega_2^{(m)2}$, де

$$\Theta_1^{(1)} = \frac{\gamma^{(1)} T_0}{\mu^{(1)}}, \quad \Omega_1^{(1)} = \frac{\eta^{(1)} a^2 i \omega}{T_0}, \quad \Omega_2^{(1)} = \frac{a^2 i \omega}{\chi^{(1)}}, \quad i^2 = -1.$$

З аналізу систем однорідних рівнянь виходить, що постійні

$\bar{H}^{(m)}$, $H^{(m)}$, $\bar{R}^{(m)}$, $R^{(m)}$, $\bar{Q}^{(m)}$, $Q^{(m)}$, $K^{(m)}$, $L^{(m)}$, $M^{(m)}$ пов'язані співвідношеннями:

$$\bar{H}_{k\alpha}^{(m)} = H_{k\alpha}^{(m)} P_{1\alpha k}^{(m)}, \quad K_{k\alpha}^{(m)} = H_{k\alpha}^{(m)} P_{2\alpha k}^{(m)}, \quad \bar{Q}_{k\alpha}^{(m)} = Q_{k\alpha}^{(m)} P_{1\alpha k}^{(m)}, \quad M_{k\alpha}^{(m)} = Q_{k\alpha}^{(m)} P_{2\alpha k}^{(m)},$$

$$\bar{R}_{j\alpha}^{(m)} = R_{j\alpha}^{(m)} B_{1\alpha j}^{(m)}, \quad L_{j\alpha}^{(m)} = R_{j\alpha}^{(m)} B_{2\alpha j}^{(m)}, \quad \text{де } \alpha = 1, 2, 3.$$

$$P_{1\alpha k}^{(m)} = \frac{\alpha^{(1)} t_{\alpha k} \left(-t_{\alpha k}^2 (C_{11}^{(m)} - 1) + \alpha^{(1)2} (C_{11}^{(m)} - 1) + (C_{11}^{(m)} - 1) \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right)}{\left(t_{\alpha k}^4 (C_{11}^{(m)} - 1) + \left(-\alpha^{(1)2} (C_{11}^{(m)} - 1) + \Omega^{(m)2} - \right. \right. \\ \left. \left. - t_{\alpha k}^2 (C_{11}^{(m)} - 1) \Omega_2^{(m)} - \Omega_2^{(m)} - 2\alpha^{(1)2} - \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right) + \right. \\ \left. + \alpha^{(1)4} - \alpha^{(1)2} \Omega^{(m)2} + \Omega_2^{(m)} \alpha^{(1)2} - \Omega_2^{(m)} \Omega^{(m)2} \right)}$$

$$P_{2\alpha k}^{(m)} = \frac{\Omega_1^{(m)} \left(-t_{\alpha k}^2 + \alpha^{(1)2} - \Omega^{(m)2} \right)}{\alpha^{(1)} \left(-t_{\alpha k}^2 (C_{11}^{(m)} - 1) + (C_{11}^{(m)} - 1) \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right)}$$

$$B_{1\alpha j}^{(m)} = \frac{\left(2r_{\alpha j}^2 \chi^{(m)2} - r_{\alpha j}^4 + r_{\alpha j}^2 \Omega_2^{(m)} + r_{\alpha j}^2 (C_{11}^{(m)} - 1) \chi^{(m)2} - r_{\alpha j}^4 (C_{11}^{(m)} - 1) + \right. \\ \left. + r_{\alpha j}^2 (C_{11}^{(m)} - 1) \Omega_2^{(m)} - \chi^{(m)4} - \right. \\ \left. - \chi^{(m)2} \Omega_2^{(m)} + \Omega^{(m)2} \chi^{(m)2} - \Omega^{(m)2} r_{\alpha j}^2 + \Omega^{(m)2} \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} r_{\alpha j}^2 \right)}{-r_{\alpha j} \chi^{(m)} \left((C_{11}^{(m)} - 1) \chi^{(m)2} - r_{\alpha j}^2 (C_{11}^{(m)} - 1) + (C_{11}^{(m)} - 1) \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right)}$$

$$B_{2\alpha j}^{(m)} = \frac{\Omega_1^{(m)} \left(r_{\alpha j}^2 - \chi^{(m)2} + \Omega^{(m)2} \right)}{r_{\alpha j} \left(\chi^{(m)2} (C_{11}^{(m)} - 1) - r_{\alpha j}^2 (C_{11}^{(m)} - 1) + (C_{11}^{(m)} - 1) \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right)}$$

Загальний розв'язок крайової задачі конструємо окремо для кожної області $\overline{G}^{(m)}$.

Для області $\overline{G}^{(1)}$

$$U_1^{(1)}(x, y) = \sum_k \sum_{\beta=1}^3 P_{1\beta k}^{(1)} H_{\beta k}^{(1)} sh(t_{\beta k}^{(1)} x) \cos \alpha_k^{(1)}(y - \eta) + \sum_j \sum_{\beta=1}^3 B_{1\beta j}^{(1)} R_{\beta j}^{(1)} ch(r_{\beta j}^{(1)} y) \sin \chi_j^{(1)}(x - \delta) + \\ + H_0^{(1)} \sin l_1^{(1)} x$$

$$U_2^{(1)}(x, y) = \sum_k \sum_{\beta=1}^3 H_{\beta k}^{(1)} ch(t_{\beta k}^{(1)} x) \sin \alpha_k^{(1)}(y - \eta) + \sum_j \sum_{\beta=1}^3 R_{\beta j}^{(1)} sh(r_{\beta j}^{(1)} y) \cos \chi_j^{(1)}(x - \delta) + R_0^{(1)} \sin l_1^{(1)} y$$

$$\Theta^{(1)}(x, y) = \sum_k \sum_{\beta=1}^3 P_{2\beta k}^{(1)} H_{\beta k}^{(1)} ch(t_{\beta k}^{(1)} x) \cos \alpha_k^{(1)}(y - \eta) + \sum_j \sum_{\beta=1}^3 B_{2\beta j}^{(1)} R_{\beta j}^{(1)} ch(r_{\beta j}^{(1)} y) \cos \chi_j^{(1)}(x - \delta) + \\ + B_0^{(1)} \cos l_1^{(1)} x + C_0^{(1)} \cos l_1^{(1)} y$$

Для області $\overline{G}^{(2)}$

$$\begin{aligned}
U_1^{(2)}(\hat{x}, y) &= \sum_k \sum_{\beta=1}^3 P_{1\beta k}^{(2)} \left(H_{\beta k}^{(2)} sh(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x}) + Q_{\beta k}^{(2)} ch(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x}) \right) \cos \alpha_k^{(1)}(y - \eta) + \\
&+ \sum_j \sum_{\beta=1}^3 B_{1\beta j}^{(2)} R_{\beta j}^{(2)} ch(r_{\beta j}^{(2)} y) \sin \chi_j^{(2)}(\hat{x} - \delta) + H_0^{(2)} \sin l_2^{(2)} \hat{x} + Q_0^{(2)} \cos l_2^{(2)} \hat{x} \\
U_2^{(2)}(\hat{x}, y) &= \sum_k \sum_{\beta=1}^3 \left(H_{\beta k}^{(2)} ch(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x}) + Q_{\beta k}^{(2)} sh(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x}) \right) \sin \alpha_k^{(1)}(y - \eta) + \\
&+ \sum_j \sum_{\beta=1}^3 R_{\beta j}^{(2)} sh(r_{\beta j}^{(2)} y) \cos \chi_j^{(2)}(\hat{x} - \delta_2) + R_0^{(2)} \sin l_2^{(2)} y \\
\Theta^{(2)}(x, y) &= \sum_k \sum_{\beta=1}^3 P_{2\beta k}^{(2)} \left(H_{\beta k}^{(2)} ch(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x}) + Q_{\beta k}^{(2)} sh(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x}) \right) \cos \alpha_k^{(1)}(y - \eta) + \\
&+ \sum_j \sum_{\beta=1}^3 B_{2\beta j}^{(2)} R_{\beta j}^{(2)} ch(r_{\beta j}^{(2)} y) \cos \chi_j^{(2)}(x - \delta_2) + B_0^{(2)} \sin l_2^{(2)} \hat{x} + C_0^{(2)} \cos l_2^{(2)} \hat{x}
\end{aligned}$$

де $H_{\beta k}^{(m)}$, $R_{\beta k}^{(m)}$, $H_0^{(m)}$, $R_0^{(m)}$, $B_0^{(m)}$, $C_0^{(m)}$, $Q_0^{(m)}$ - довільні постійні, такі, що підлягають визначенню з граничних умов.

Формулювання і рішення допоміжних крайових задач

Реалізуючі основний алгоритм модифікованого для випадку термопружної області методу суперпозиції [3-5] для отримання визначальної системи інтегральних рівнянь (СІР), розглянемо допоміжну крайову задачу, що характеризується наступними умовами в околі границь прямокутного перерізу деталі:

для області $\bar{G}^{(1)}$

$$\begin{aligned}
U_1^{(1)}(\delta, y) &= f_1(y), \quad \sigma_{12}^{(1)}(\delta, y) = \varphi_1(y), \quad \left. \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=\delta} = f_5(y) \\
U_2^{(1)}(x, \eta) &= f_2(x), \quad \sigma_{12}^{(1)}(x, \eta) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial y} \right|_{y=\eta} = f_8(x)
\end{aligned} \tag{4}$$

для області $\bar{G}^{(2)}$

$$\begin{aligned}
U_1^{(2)}(0, y) &= f_1(y), \quad \sigma_{12}^{(2)}(0, y) = r_{12} \varphi_1(y), \quad \left. \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=0} = f_5(y) \\
U_2^{(2)}(\hat{x}, \eta) &= f_4(\hat{x}), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial y} \right|_{y=\eta} = f_7(\hat{x}) \\
U_1^{(2)}(\delta_2, y) &= f_3(y), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\delta_2, y) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=\delta_2} = f_6(y)
\end{aligned} \tag{5}$$

$f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(\hat{x})$, $f_5(y)$, $f_6(y)$, $f_7(\hat{x})$, $f_8(x)$, $\varphi_1(y)$ - невідомі допоміжні функції.

Допоміжна крайова задача (4), (5) не відповідає, звичайно, початковій граничній задачі, але припускає аналітичне рішення і дозволяє, по-перше, задовольнити частину початкових граничних умов і, по-друге, виразити усі характеристики початкової

задачі через коефіцієнти Фур'є невідомих функцій $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(\hat{x})$, $f_5(y)$, $f_6(y)$, $f_7(\hat{x})$, $f_8(x)$, $\varphi_1(y)$.

Після визначення констант $H_{\beta k}^{(m)}$ та $R_{\beta k}^{(m)}$, через коефіцієнти Фур'є f_{1k} , f_{2j} , f_{3k} , f_{4j} , f_{5k} , f_{6k} , f_{7j} , f_{8j} , φ_{1k} введених функцій $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(\hat{x})$, $f_5(y)$, $f_6(y)$, $f_7(\hat{x})$, $f_8(x)$, $\varphi_1(y)$, отримуємо компоненти вектора переміщень U_1, U_2 і температуру Θ . Наприклад в області $\bar{G}^{(1)}$ вони мають вигляд:

$$\begin{aligned}
U_1^{(1)}(x, y) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_{1k} \left(-\Delta_1^{(1)} \frac{sh(t_1^{(1)} x)}{sh(t_1^{(1)} \delta)} + 2\Delta_2^{(1)} \frac{sh(t_2^{(1)} x)}{sh(t_2^{(1)} \delta)} + \Delta_3^{(1)} \frac{sh(t_3^{(1)} x)}{sh(t_3^{(1)} \delta)} \right) + \right. \\
& + f_{5k} \left(\Delta_4^{(1)} \left(-\frac{sh(t_1^{(1)} x)}{sh(t_1^{(1)} \delta)} + \frac{sh(t_3^{(1)} x)}{sh(t_3^{(1)} \delta)} \right) \right) + \\
& + \varphi_{1k} \left(\Delta_6^{(1)} \frac{sh(t_1^{(1)} x)}{sh(t_1^{(1)} \delta)} + \Delta_2^{(1)} \frac{sh(t_2^{(1)} x)}{sh(t_2^{(1)} \delta)} - \Delta_7^{(1)} \frac{sh(t_3^{(1)} x)}{sh(t_3^{(1)} \delta)} \right) \left. \right] \cos \alpha_k (y - \eta) + \\
& \sum_{j=1}^{\infty} \left[f_{2j} \left(-\Delta_8^{(1)} \frac{ch(r_1^{(1)} y)}{sh(r_1^{(1)} \eta)} - 2\Delta_9^{(1)} \frac{ch(r_2^{(1)} y)}{sh(r_2^{(1)} \mu)} + \Delta_{10}^{(1)} \frac{ch(r_3^{(1)} y)}{sh(r_3^{(1)} \eta)} \right) + \right. \\
& + f_{8j} \left(-\Delta_{11}^{(1)} \frac{ch(r_1^{(1)} y)}{sh(r_1^{(1)} \eta)} + \Delta_{12}^{(1)} \frac{ch(r_3^{(1)} y)}{sh(r_3^{(1)} \eta)} \right) \left. \right] \times \sin \chi_j^{(1)} (x - \delta) + f_{10} \frac{\sin k_1^{(1)} x}{\sin k_1^{(1)} \delta} \\
U_2^{(1)}(x, y) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_{1k} \left(\Delta_{13}^{(1)} \frac{ch(t_1^{(1)} x)}{sh(t_1^{(1)} \delta)} - \Delta_{14}^{(1)} \frac{ch(t_2^{(1)} x)}{sh(t_2^{(1)} \delta)} - \Delta_{15}^{(1)} \frac{ch(t_3^{(1)} x)}{sh(t_3^{(1)} \delta)} \right) + \right. \\
& + f_{5k} \left(-\Delta_{16}^{(1)} \frac{ch(t_1^{(1)} x)}{sh(t_1^{(1)} \delta)} + \Delta_{17}^{(1)} \frac{ch(t_3^{(1)} x)}{sh(t_3^{(1)} \delta)} \right) + \\
& + \varphi_{1k} \left(-\Delta_{18}^{(1)} \frac{ch(t_1^{(1)} x)}{sh(t_1^{(1)} \delta)} - \Delta_{19}^{(1)} \frac{ch(t_2^{(1)} x)}{sh(t_2^{(1)} \delta)} + \Delta_{20}^{(1)} \frac{ch(t_3^{(1)} x)}{sh(t_3^{(1)} \delta)} \right) \left. \right] \sin \alpha_k (y - \eta) + \tag{6} \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \left[f_{2j} \left(\Delta_{21}^{(1)} \frac{sh(r_1^{(1)} y)}{sh(r_1^{(1)} \eta)} + \Delta_{22}^{(1)} \frac{sh(r_2^{(1)} y)}{sh(r_2^{(1)} \mu)} - \Delta_{23}^{(1)} \frac{sh(r_3^{(1)} y)}{sh(r_3^{(1)} \eta)} \right) + f_{8j} \left(\Delta_{24}^{(1)} \left(\frac{sh(r_1^{(1)} y)}{sh(r_1^{(1)} \eta)} - \frac{sh(r_3^{(1)} y)}{sh(r_3^{(1)} \eta)} \right) \right) \right] \times \\
& \times \cos \chi_j^{(1)} (x - \delta) + f_{20} \frac{\sin k_1^{(1)} y}{\sin k_1^{(1)} \eta} \\
\Theta^{(1)}(x, y) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_{1k} \left(\Delta_{25}^{(1)} \frac{ch(t_1^{(1)} x)}{sh(t_1^{(1)} \delta)} - \Delta_{26}^{(1)} \frac{ch(t_3^{(1)} x)}{sh(t_3^{(1)} \delta)} \right) + f_{5k} \left(-\Delta_{27}^{(1)} \frac{ch(t_1^{(1)} x)}{sh(t_1^{(1)} \delta)} + \Delta_{28}^{(1)} \frac{ch(t_3^{(1)} x)}{sh(t_3^{(1)} \delta)} \right) \right] + \\
& + \varphi_{1k} \left(-\Delta_{33}^{(1)} \frac{ch(t_1^{(1)} x)}{sh(t_1^{(1)} \delta)} + \Delta_{34}^{(1)} \frac{ch(t_3^{(1)} x)}{sh(t_3^{(1)} \delta)} \right) \left. \right] \cos \alpha_k (y - \eta) + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \left[f_{2j} \left(\Delta_{29}^{(1)} \frac{ch(r_1^{(1)} y)}{sh(r_1^{(1)} \eta)} - \Delta_{30}^{(1)} \frac{ch(r_3^{(1)} y)}{sh(r_3^{(1)} \eta)} \right) + f_{8j} \left(\Delta_{31}^{(1)} \frac{ch(r_1^{(1)} y)}{sh(r_1^{(1)} \eta)} - \Delta_{32}^{(1)} \frac{ch(r_3^{(1)} y)}{sh(r_3^{(1)} \eta)} \right) \right] \times
\end{aligned}$$

$$\Delta_{21}^{(m)} = \frac{\left(\chi_j^{(m)^2} + r_{2j}^{(2)^2}\right)\left(-\chi_j^{(m)^2} + \Omega^{(m)^2} + r_{3j}^{(2)^2}\right) \times \left(\left(C_{11}^{(m)} - 1\right)\chi_j^{(m)^2} - \left(C_{11}^{(m)} - 1\right)r_{1j}^{(2)^2} + \left(C_{11}^{(m)} - 1\right)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)}{\left(\chi_j^{(m)^2} - r_{2j}^{(2)^2}\right)\left(r_{1j}^{(2)^2} - r_{3j}^{(2)^2}\right)\left(\left(C_{11}^{(m)} - 1\right)\Omega^{(m)^2} + \left(C_{11}^{(m)} - 1\right)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)}$$

$$\Delta_{22}^{(m)} = \frac{2\chi_j^{(m)^2}}{\Omega^{(m)^2}}$$

$$\Delta_{23}^{(m)} = \frac{\left(\chi_j^{(m)^2} + r_{2j}^{(2)^2}\right)\left(-\chi_j^{(m)^2} + \Omega^{(m)^2} + r_{1j}^{(2)^2}\right) \times \left(\left(C_{11}^{(m)} - 1\right)\chi_j^{(m)^2} - \left(C_{11}^{(m)} - 1\right)r_{3j}^{(2)^2} + \left(C_{11}^{(m)} - 1\right)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)}{\left(\chi_j^{(m)^2} - r_{2j}^{(2)^2}\right)\left(r_{1j}^{(2)^2} - r_{3j}^{(2)^2}\right)\left(\left(C_{11}^{(m)} - 1\right)\Omega^{(m)^2} + \left(C_{11}^{(m)} - 1\right)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)}$$

$$\Delta_{24}^{(m)} = \frac{\left(\left(C_{11}^{(m)} - 1\right)\chi_j^{(m)^2} - \left(C_{11}^{(m)} - 1\right)r_{1j}^{(2)^2} + \left(C_{11}^{(m)} - 1\right)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right) \times \left(\left(C_{11}^{(m)} - 1\right)\chi_j^{(m)^2} - \left(C_{11}^{(m)} - 1\right)r_{3j}^{(2)^2} + \left(C_{11}^{(m)} - 1\right)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)}{\Omega_1^{(m)}\left(r_{1j}^{(2)^2} - r_{3j}^{(2)^2}\right)\left(\left(C_{11}^{(m)} - 1\right)\Omega^{(m)^2} + \left(C_{11}^{(m)} - 1\right)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)}$$

$f_{10}, f_{1k}, f_{20}, f_{2j}, f_{30}, f_{3k}, f_{40}, f_{4j}, f_{50}, f_{5j}, f_{60}, f_{6k}, f_{7j}, f_{8j}, \varphi_{1k}$ – коефіцієнти Фур'є відповідних функцій.

Виведення визначальної системи інтегральних рівнянь (СІР)

Використовуючи невраховані граничні умови з (2), а саме

$$U_2^{(1)}(\delta, y) = U_2^{(2)}(0, y), \quad \Theta^{(1)}\Big|_{x=\delta} = \Theta^{(2)}\Big|_{\hat{x}=0}, \quad \sigma_{11}^{(1)}(\delta, y) = \sigma_{11}^{(2)}(0, y),$$

$$\sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) = q, \quad \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial y} + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0, \quad \sigma_{22}^{(1)}(x, \eta) = q, \quad \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial x} + T^{(1)}\Theta^{(1)} = 0,$$

$$\sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = q, \quad \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}} + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0, \quad \sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = q,$$

зведемо досліджувану задачу до розв'язку наступної системи інтегральних рівнянь відносно функцій $f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4(\hat{x}), f_5(y), f_6(y), f_7(\hat{x}), f_8(x), \varphi_1(y)$

$$M_{k1}\varphi_1 + \sum_{r=1}^8 L_{kr}f_r = Q_k, \quad \text{де } Q_k = q_k, \quad k = 1, 2, \dots, 6, \quad r = 1, 2, \dots, 8$$

$$f_6 + T^{(1)}\Theta^{(1)} = 0, \quad f_7 + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0, \quad f_8 + T^{(1)}\Theta^{(1)} = 0, \quad \text{де } T^{(m)} = \frac{\alpha^{(m)}}{\lambda_1^{(m)}} a, \quad m = 1, 2$$

Наприклад, для першого рівняння маємо:

$$L_{11}f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} f_{1k} \left(\Delta_{13}^{(1)} \text{cth}(t_{1k}^{(1)}\delta) + \Delta_{13}^{(2)} \text{cth}(t_{1k}^{(2)}\delta_2) - \Delta_{14}^{(1)} \text{cth}(t_{2k}^{(1)}\delta) - \Delta_{14}^{(2)} \text{cth}(t_{2k}^{(2)}\delta_2) - \Delta_{15}^{(1)} \text{cth}(t_{3k}^{(1)}\delta) - \Delta_{15}^{(2)} \text{cth}(t_{3k}^{(2)}\delta_2) \right) \sin \alpha_k (y - \eta)$$

$$\begin{aligned}
L_{12}f_2 &= \sum_{j=1}^{\infty} f_{2j} \left(\Delta_{21}^{(1)} \frac{sh(r_{1j}^{(1)}y)}{sh(r_{1j}^{(1)}\eta)} + \Delta_{22}^{(1)} \frac{sh(r_{2j}^{(1)}y)}{sh(r_{2j}^{(1)}\eta)} - \Delta_{23}^{(1)} \frac{sh(r_{3j}^{(1)}y)}{sh(r_{3j}^{(1)}\eta)} \right) + f_{20} \frac{\sin k_1^{(1)}y}{\sin k_1^{(1)}\eta} \quad (7) \\
L_{14}f_4 &= \sum_{j=1}^{\infty} f_{4j} \left(-\Delta_{21}^{(2)} \frac{sh(r_{1j}^{(2)}y)}{sh(r_{1j}^{(2)}\eta)} - \Delta_{22}^{(2)} \frac{sh(r_{2j}^{(2)}y)}{sh(r_{2j}^{(2)}\eta)} + \Delta_{23}^{(2)} \frac{sh(r_{3j}^{(2)}y)}{sh(r_{3j}^{(2)}\eta)} \right) \cos \chi_j^{(2)} \delta_2 - \\
&\quad - f_{40} \frac{\sin k_1^{(2)}y}{\sin k_1^{(2)}\eta} \\
L_{15}f_5 &= \sum_{k=1}^{\infty} f_5 \left(-\Delta_{16}^{(1)} cth(t_{1k}^{(1)}\delta) - \Delta_{16}^{(2)} cth(t_{1k}^{(2)}\delta) + \Delta_{17}^{(1)} cth(t_{3k}^{(1)}\delta) + \Delta_{17}^{(2)} cth(t_{3k}^{(2)}\delta) \right) \sin \alpha_k (y - \eta) \\
L_{17}f_7 &= \sum_{j=1}^{\infty} f_{7j} \left(-\Delta_{24}^{(2)} \frac{sh(r_{1j}^{(2)}y)}{sh(r_{1j}^{(2)}\eta)} + \Delta_{24}^{(2)} \frac{sh(r_{3j}^{(2)}y)}{sh(r_{3j}^{(2)}\eta)} \right) \cos \chi_j^{(2)} \delta_2 \\
L_{18}f_8 &= \sum_{j=1}^{\infty} f_{7j} \left(\Delta_{24}^{(1)} \frac{sh(r_{1j}^{(1)}y)}{sh(r_{1j}^{(1)}\eta)} - \Delta_{24}^{(1)} \frac{sh(r_{3j}^{(1)}y)}{sh(r_{3j}^{(1)}\eta)} \right) \\
M_{11}\Phi_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{1k} \left(-\Delta_{18}^{(1)} cth(t_{1k}^{(1)}\delta) - \Delta_{18}^{(2)} cth(t_{1k}^{(2)}\delta_2) - \Delta_{19}^{(1)} cth(t_{2k}^{(1)}\delta) - \Delta_{19}^{(2)} cth(t_{2k}^{(2)}\delta_2) + \right. \\
&\quad \left. + \Delta_{20}^{(1)} cth(t_{3k}^{(1)}\delta) + \Delta_{20}^{(2)} cth(t_{3k}^{(2)}\delta_2) \right) \sin \alpha_k (y - \eta)
\end{aligned}$$

Асимптотичний аналіз НДС у кутових точках перерізу

Проведемо дослідження розв'язку СІР у кутових точках областей $\overline{G}^{(m)}$. Це дозволить визначити асимптотику коефіцієнтів Фур'є невідомих функцій у випадку коли $k \rightarrow \infty$ та $j \rightarrow \infty$. Відповідно алгоритму наведеному у [4] припустимо, що функції $\varphi_1(\xi)$, $f_{5k}(y)$, $f_{7j}(\hat{x})$, $f_{8j}(x)$ мають особливість у кутовій точці стику областей $A(\delta, \eta)$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\xi) &= \Phi_1^A (\eta - \xi)^{\alpha-1}, \quad \xi \rightarrow \eta; \quad f_5(\xi) = F_5^A (\eta - \xi)^{\beta-1}, \quad \xi \rightarrow \eta \\
f_7(\xi) &= F_7^A \xi^{\beta-1}, \quad \xi \rightarrow 0; \quad f_8(\xi) = F_8^A (\delta - \xi)^{\beta-1}, \quad \xi \rightarrow \delta \quad (8)
\end{aligned}$$

а функції $f_i(\xi)$ неперервні у своїх областях визначення, але їх похідні мають розрив у кутових точках. В околі точки $A(\delta, \eta)$

$$\begin{aligned}
f_1'(\xi) &= F_1^A (\eta - \xi)^{\alpha-1} \quad \text{якщо } \xi \rightarrow \eta, \quad f_2'(\xi) = F_2^A (\delta - \xi)^{\alpha-1} \quad \text{якщо } \xi \rightarrow \delta \\
f_4'(\xi) &= F_4^A \xi^{\alpha-1} \quad \text{якщо } \xi \rightarrow 0 \quad (9)
\end{aligned}$$

В околі точки $B(\delta_2, \eta)$ області $\overline{G}^{(2)}$

$$\begin{aligned}
f_3'(\xi) &= F_3^B (\eta - \xi)^{\lambda-1}, \quad \xi \rightarrow \eta; \quad f_4'(\xi) = F_4^B (\delta_2 - \xi)^{\lambda-1}, \quad \xi \rightarrow \delta_2 \\
f_6(\xi) &= F_6^B (\eta - \xi)^{\gamma-1}, \quad \xi \rightarrow \eta; \quad f_7(\xi) = F_7^B (\delta_2 - \xi)^{\gamma-1}, \quad \xi \rightarrow \delta_2 \quad (10)
\end{aligned}$$

Через $\alpha, \lambda, \beta, \gamma$ позначено параметри локальної особливості (ПЛО) по напруженню і температурі відповідно, що характеризують особливості функцій $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(\hat{x})$, $f_5(y)$, $f_6(y)$, $f_7(\hat{x})$, $f_8(x)$, $\varphi_1(y)$, а через $F_1^A, F_2^A, \dots, F_7^B, F_8^A$ – довільні постійні.

Визначаємо асимптотику коефіцієнтів Фур'є функцій в околі точок A та B .

Можна показати, що коли $k \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\varphi_{1k} &\cong \Phi_1 \eta^{-1} (\alpha_k^{(1)})^{-\alpha}, \quad f_{1k} \cong F_1 \eta^{-1} (\alpha_k^{(1)})^{-\alpha-1}, \quad f_{2j} \cong F_2 \delta^{-1} (\chi_j^{(1)})^{-\alpha-1}, \quad f_{3k} \cong F_3 \eta^{-1} (\alpha_k^{(1)})^{-\lambda-1}, \\
f_{4j} &\cong F_4 \delta_2^{-1} (\chi_j^{(2)})^{-\lambda-1} \quad \text{якщо } \xi \rightarrow \delta_2, \quad f_{4j} \cong \bar{F}_4 (-1)^{j+1} \delta_2^{-1} (\chi_j^{(2)})^{-\alpha-1} \quad \text{якщо } \xi \rightarrow 0, \\
f_{5k} &\cong F_5 \eta^{-1} (\alpha_k^{(1)})^{-\beta}, \quad f_{6k} \cong F_6 \eta^{-1} (\alpha_k^{(2)})^{-\gamma}, \quad f_{7j} \cong F_7 \delta_2^{-1} (\chi_j^{(2)})^{-\gamma} \quad \text{якщо } \xi \rightarrow \delta_2, \\
f_{7j} &\cong \bar{F}_7 (-1)^{j+1} \delta_2^{-1} (\chi_j^{(2)})^{-\beta} \quad \text{якщо } \xi \rightarrow 0, \quad f_{8j} \cong F_8 \delta^{-1} (\chi_j^{(1)})^{-\beta}; \tag{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= -2\Phi_1^A \Gamma_1(\alpha), \quad F_1 = 2F_1^A \Gamma_1(\alpha), \quad F_2 = 2F_2^A \Gamma_1(\chi), \quad F_3 = 2F_3^B \Gamma_1(\alpha), \quad \bar{F}_4 = 2F_4^A \Gamma_1(\chi), \\
F_4 &= 2F_4^B \Gamma_1(\chi), \quad F_5 = 2F_5^A \Gamma_1(\alpha), \quad F_6 = 2F_6^B \Gamma_1(\alpha), \quad \bar{F}_7 = 2F_7^A \Gamma_1(\chi), \quad F_7 = 2F_7^B \Gamma_1(\chi), \\
F_8 &= 2F_8^A \Gamma_1(\chi), \quad \text{де } \Gamma(x) - \text{гамма-функція, } \Gamma_1(\alpha) = \Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha/2).
\end{aligned}$$

Якщо підставити формули (8)-(11) у вирази для лінійних операторів (7) системи інтегральних рівнянь, отримаємо можливість дослідити асимптотичну поведінку її лівих частин. Таким чином, для визначення характеру особливості допоміжних функцій в околі точки A маємо наступні рівняння

$$\begin{aligned}
U_2^{(1)}(\delta, y) &= U_2^{(2)}(0, y), \quad \Theta^{(1)} \Big|_{x=\delta} = \Theta^{(2)} \Big|_{x=0}, \quad \sigma_{11}^{(1)}(\delta, y) = \sigma_{11}^{(2)}(0, y), \quad (\text{якщо } y \rightarrow \eta), \\
\sigma_{22}^{(1)}(x, \eta) &= q, \quad f_8 + T^{(1)} \Theta^{(1)} = 0, \quad (\text{якщо } x \rightarrow \delta), \tag{12} \\
\sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) &= q, \quad f_7 + T^{(2)} \Theta^{(2)} = 0, \quad (\text{якщо } \hat{x} \rightarrow 0).
\end{aligned}$$

В околі точки B маємо наступні рівняння

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) &= q, \quad f_6 + T^{(2)} \Theta^{(2)} = 0 \quad (\text{якщо } y \rightarrow \eta), \tag{13} \\
\sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) &= q, \quad f_7 + T^{(2)} \Theta^{(2)} = 0, \quad (\text{якщо } \hat{x} \rightarrow \delta_2).
\end{aligned}$$

Підставляємо асимптотичні вирази для коефіцієнтів Фур'є допоміжних функцій (11) до рівнянь (12) та (13). Після сумування рядів та враховуючи асимптотичну значимість невідомих функцій отримаємо наступну однорідну систему алгебраїчних рівнянь для визначення ПЛО по напруженням та температурі

$$\begin{aligned}
-m_{12} \sin \frac{\pi\alpha}{2} \Phi_1 + 2(n^{(1)} + r_{21} n^{(2)}) \sin \frac{\pi\alpha}{2} F_1 + 2n^{(1)} \alpha F_2 + 2n^{(2)} r_{21} \alpha \bar{F}_4 &= 0 \\
(n_{11}^{(1)} + r_{12} n_{11}^{(2)}) \sin \frac{\pi\alpha}{2} \Phi_1 + 2m_{12} \sin \frac{\pi\alpha}{2} F_1 + 2(1 - n^{(1)} \alpha) F_2 + 2(1 - n^{(2)} \alpha) \bar{F}_4 &= 0 \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\left((n^{(1)})^{-1} + \alpha \right) \Phi_1 + 2\alpha F_1 + 2 \sin \frac{\pi\alpha}{2} F_2 = 0, \quad \left((n^{(2)})^{-1} + \alpha \right) r_{12} \Phi_1 + 2\alpha F_1 + 2 \sin \frac{\pi\alpha}{2} \bar{F}_4 = 0$$

$$4F_5 \cos \frac{\pi\beta}{2} + 2F_8 + 2\bar{F}_7 = 0, \quad \bar{F}_7(-\beta) \sin \frac{\pi\beta}{2} = 0, \quad F_8(-\beta) \sin \frac{\pi\beta}{2} = 0, \tag{15}$$

$$\sin \frac{\pi\lambda}{2} F_3 + \lambda F_4 = 0, \quad \lambda F_3 + \sin \frac{\pi\lambda}{2} F_4 = 0, \tag{16}$$

$$F_6(-\gamma) \sin \frac{\pi\gamma}{2} = 0, \quad F_7(-\gamma) \sin \frac{\pi\gamma}{2} = 0. \tag{17}$$

Тут використані позначення

$$m_{12} = \left(C_{11}^{(1)-1} + C_{11}^{(2)-1} \right), \quad n^{(m)} = \frac{C_{11}^{(m)} - 1}{C_{11}^{(m)}}, \quad n_{11}^{(m)} = \frac{C_{11}^{(m)} + 1}{C_{11}^{(m)}}.$$

Особливість цієї системи полягає у тому, що вона розпадається на чотири частини. Перші чотири рівняння, об'єднані формулами (14) містять невідомі Φ_1 , F_1 , F_2 , \bar{F}_4 . Вони визначають значення α – ПЛО по напруженням у точці A . П'яте, шосте та сьоме рівняння об'єднують формули (15). Вони містять невідомі F_5 , \bar{F}_7 , F_8 та

визначають значення β – ПЛО по температурі у точці A . Рівняння (16) та (17) містять невідомі F_3, F_4 та F_6, F_7 відповідно й визначають особливість у зовнішній кутовій точці B – ПЛО по напруженням та температурі λ та γ .

За умови існування нетривіального розв'язку рівнянь (14) та (16) даної системи отримаємо два характеристичні рівняння для визначення параметру λ :

$$\lambda^2 - \sin^2 \frac{\pi\lambda}{2} = 0. \quad (18)$$

Характеристичне рівняння (18) має один дійсний корінь $\lambda_0 = 1$, та безліч комплексних коренів, $\lambda_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ [3, 4]. Звичайно, треба врахувати лише ті комплексні корені, для яких $\text{Re } \lambda_k > 1$.

Рівняння (15) та (17) системи дають підставу казати, що температура не має особливості у кутових та внутрішніх точках області, оскільки з цих рівнянь витікає, що невідомі F_5, \bar{F}_7, F_8 та F_6, F_7 дорівнюють нулю.

ПЛО α по напруженням у точці A , визначається за умови існування нетривіального розв'язку системи (14).

$$\Delta(\alpha, \lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, \lambda^{(2)}, \mu^{(2)}, r_{21}) = 0$$

Це рівняння є симетричним відносно пружних параметрів областей $G^{(m)}$.

Визначення ПЛО у кутових точках перерізу областей дає можливість прогнозувати інтенсивність ЛКН у цих проблемних зонах і застосувати критерії міцності, беручи максимальні напруження саме в цих областях з урахуванням ПЛО.

Важливим напрямком подальшої роботи буде дослідження ПЛО для анізотропних складених перетинів деталей, що безумовно підвищить рівень практичного застосування запропонованої методики розрахунку. Перспективним має бути і аналіз розподілу внутрішньої енергії по області перерізу з урахуванням ЛКН у околу нерегулярних точок.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора // Тр. Амер. о-ва инженеров- механиков. Прикл. механика. 1971. Т. 38. №2. С. 87-96.
2. Гетман И.П., Лисицкий О.Н. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуплоск // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52. Вып.6. С.1044-1048.
3. Вовк Л.П., Соболь Б.В. О концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69. – Вып. 2. – С. 269-278.
4. Вовк Л.П. Особенности локальной концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред. – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – 267с.
5. Вовк Л.П., Соболь Б.В. Особенности динамических напряжений в окрестности точки стыка трех упругих сред // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69. – Вып. 2. – С. 279-289.
6. Вовк Л.П. Анализ локальных особенностей волнового поля в сингулярных точках составной области // Вісник Сумського держ. університету. Сер. «Фізика, математика, механіка». – 2003. – №10(56). – С. 144-156.
7. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. – 283с.
8. Новацкий В.Н. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. – 256с.