УДК 519.21

Т. Н. КРАВЕЦ

О существовании решения стохастического интегрального уравнения типа Вольтерра

Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ — некоторое вероятностное пространство. Множество случайных векторов в $\mathscr{R}^d$, определенных на $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ с метрикой

$$\bar{\rho}(\xi, \eta) = \left(\mathbf{M}\frac{|\xi-\eta|^2}{1+|\xi-\eta|^2}\right)^{1/2}$$

образует метрическое пространство. Обозначим его П. Сходимость в пространстве П эквивалентна сходимости по вероятности. Рассмотрим множество стохастически непрерывных векторных случайных функций $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_d(t))$, определенных на отрезке $[0, T]$ и со значениями в П. Такое множество с метрикой

$$\rho(\xi(\cdot), \eta(\cdot)) = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left(M\frac{|\xi(t)-\eta(t)|^2}{1+|\xi(t)-\eta(t)|^2}\right)^{1/2}$$

образует метрическое линейное и полное пространство П.

Рассмотрим решение нелинейного стохастического интегрального уравнения типа Вольтерра вида

$$\xi(t) = h(t) + \int_0^t K_1(t, \tau) f_1(\tau, \xi(\tau))\, d\tau + \int_0^t K_2(t, \tau) f_2(\tau, \xi(\tau))\, dw(\tau) \qquad (1)$$

в пространстве П. Здесь $w(t)$ — d-мерный винеровский процесс. Предположим, что выполнены условия:

1) для всех $t \in [0, T]$ определены σ-алгебры событий $\mathfrak{F}_t$, обладающие свойствами: а) при $t_1 < t_2$ имеет место включение $\mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_2}$; б) $w(t)$ подчинен потоку σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_t\}$; в) $w(t+s) - w(t)$ (t фиксировано, s—аргумент) не зависит от σ-алгебры $\mathfrak{F}_t$;

2) $h(t)$ — стохастически непрерывный векторный случайный процесс, $h(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_d(t))$, $t \in [0, T]$, подчиненный потоку σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_t\}$;

3) стохастические ядра $K_1(t, \tau)$, $K_2(t, \tau)$ — случайные матрицы размерности соответственно $d \times n$ и $d \times m$, определенные для $\forall t, \tau \in [0, T]$ и измеримые относительно $\mathfrak{F}_\tau$ при всех $\tau \leqslant t$;

4) $f_1(t, x)$ — векторная функция, определенная для $t \in [0, T]$ и вектора $x \in \mathscr{R}^d$, со значениями в $\mathscr{R}^n$; $f_2(t, x)$ — матричная функция, определенная для $t \in [0, T]$ вектора $x \in \mathscr{R}^d$, имеющая размерность $m \times d$.

Под нормой матрицы $A = \{a_{ij}\}$ будем понимать величину $|A| = \sqrt{a_{ij}^2}$.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) существует постоянная C такая, что

$$|f_i(\tau, x) - f_i(\tau, y)|^2 \leqslant C^2\frac{|x-y|^2}{1+|x-y|^2};$$

2) существует постоянная L такая, что

$$|f_i(\tau, 0)| < L;$$

3) элементы матриц $K_i(t, \tau)$ стохастически непрерывны по $t \in [0, T]$ при каждом $\tau \leqslant t$;

4) существует постоянная K такая, что

$$\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T} |K_i(t, \tau)| \leqslant K \text{ для } \omega \in \Omega.$$

Тогда существует единственное решение уравнения (1) в пространстве П, подчиненное потоку $\{\mathfrak{F}_t\}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что отображение

$$(U\xi)(t)=h(t)+\int_0^t K_1(t,\tau)f_1(\tau,\xi(\tau))\,d\tau+\int_0^t K_2(t,\tau)f_2(\tau,\xi(\tau))\,dw(\tau)$$

переводит метрическое пространство П в себя непрерывно, и некоторая его степень является сжатием. Затем, применив теорему Банаха о неподвижной точке, получим требуемое.

Заметим, что из условий теоремы следует, что $|f_\cdot(t,x)|\leqslant C_1$.

Пусть $\xi(\cdot)\in П$, покажем, что $(U\xi)(\cdot)\in П$. Так как П — линейное пространство, то достаточно показать, что непрерывен каждый интеграл в правой части (1). Пусть

$$J_1(t)=\int_0^t K_1(t,\tau)f_1(\tau,\xi(\tau))\,d\tau;\quad J_2(t)=\int_0^t K_2(t,\tau)f_2(\tau,\xi(\tau))\,dw(\tau).$$

Достаточно ограничиться скалярным случаем, т. е. предположением, что $K_i(t,\tau)$, $f_i(\tau,\xi(\tau))$, $w(\tau)$ — случайные процессы, принимающие числовые значения, поскольку интегралы $J_1(t)$ и $J_2(t)$ можно рассматривать как сумму интегралов от скалярных процессов. Тогда для $J_1(t)$

$$J_1(t+h)-J_1(t)=\int_0^t [K_1(t+h,\tau)-K_1(t,\tau)]f_1(\tau,\xi(\tau))\,d\tau+$$

$$+\int_t^{t+h} K_1(t+h,\tau)f_1(\tau,\xi(\tau))\,d\tau.$$

Второе слагаемое в правой части равенства стремится к 0 с вероятностью 1 при $h\to 0$. Далее,

$$\mathbf{M}\left|\int_0^t [K_1(t+h,\tau)-K_1(t,\tau)]f_1(\tau,\xi(\tau))\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_1\int_0^t \mathbf{M}\,|K_1(t+h,\tau)-K_1(t,\tau)|\,d\tau\to 0$$

при $h\to 0$ в силу условий 3), 4) теоремы 1. Отсюда следует, что интеграл $J_1(t)$ стохастически непрерывен.

Аналогично докажем стохастическую непрерывность второго интеграла. Пусть

$$J_2(t)=\int_0^t K_2(t,\tau)f_2(\tau,\xi(\tau))\,dw(\tau).$$

Тогда

$$\mathbf{M}\,|J_2(t+h)-J_2(t)|^2\leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\int_0^t \mathbf{M}\,|K_2(t+h,\tau)-K_2(t,\tau)|^2\,|f_2(\tau,\xi(\tau))|^2\,d\tau+h(KC_1)^2\right.\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Итак, $(U\xi)(\cdot)\in П$.

Покажем, что некоторая степень оператора U является сжатием:

$$\bar{\rho}((U\xi)(t),(U\eta)(t))\leqslant$$

$$\leqslant \left(\mathbf{M} \left| \int_0^t K_1(t, \tau) [f_1(\tau, \xi(\tau)) - f_1(\tau, \eta(\tau))] \, d\tau \right|^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\mathbf{M} \left| \int_0^t K_2(t, \tau) [f_2(\tau, \xi(\tau)) - f_2(\tau, \eta(\tau))] \, dw(\tau) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

В силу свойств стохастических интегралов получаем

$$\bar{\rho}((U\xi)(t), (U\eta)(t)) \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \mathbf{M} t \int_0^t K_1^2(t, \tau) [f_1(\tau, \xi(\tau)) - f_1(\tau, \eta(\tau))]^2 \, d\tau \right\}^{1/2} +$$

$$+ \left\{ \int_0^t \mathbf{M} K_2^2(t \ \tau) [f_2(\tau, \xi(\tau)) - f_2(\tau, \eta(\tau))]^2 \, d\tau \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ t \int_0^t K^2 nd \mathbf{M} [f_1(\tau, \xi(\tau)) - f_1(\tau, \eta(\tau))]^2 \, d\tau \right\}^{1/2} +$$

$$+ \left\{ \int_0^t K^2 md \, \mathbf{M} [f_2(\tau, \xi(\tau)) - f_2(\tau, \eta(\tau))]^2 \, d\tau \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant K \sqrt{d} (\sqrt{Tn} + \sqrt{m}) \left(\int_0^t \mathbf{M} \frac{|\xi(\tau) - \eta(\tau)|^2}{1 + |\xi(\tau) - \eta(\tau)|^2} \, d\tau \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant K^* \left(\max_{0 \leqslant \tau \leqslant T} \mathbf{M} \frac{|\xi(\tau) - \eta(\tau)|^2}{1 + |\xi(\tau) - \eta(\tau)|^2} t \right)^{1/2} = K^* \sqrt{t} \rho(\xi(\cdot), \eta(\cdot)).$$

Таким образом,

$$\rho((U\xi)(\cdot), (U\eta)(\cdot)) \leqslant K^* \sqrt{T} \rho(\xi(\cdot), \eta(\cdot)).$$

Из этого равенства, в частности, следует непрерывность оператора U. Далее,

$$\bar{\rho}((U^2\xi)(t), (U^2\eta)(t)) \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \mathbf{M} \left| \int_0^t K_1(t, \tau) [f_1(\tau, (U\xi)(\tau)) - f_1(\tau, (U\eta)(\tau))] \, d\tau + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \int K_2(t, \tau) [f_2(\tau, (U\xi)(\tau)) - f_2(\tau, (U\eta)(\tau))] \, dw(\tau) \right|^2 \right\}^{1/2}.$$

Из предыдущих выкладок

$$\bar{\rho}((U^2\xi)(t), (U^2\eta)(t)) \leqslant K^* \left(\int_0^t \mathbf{M} \frac{|(U\xi)(\tau) - (U\eta)(\tau)|^2}{1 + |(U\xi)(\tau) - (U\eta)(\tau)|^2} \, d\tau \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant K^* \left\{ \int_0^t (K^*)^2 \int_0^\tau \mathbf{M} \frac{|\xi(s) - \eta(s)|^2}{1 + |\xi(s) - \eta(s)|^2} \, ds \, d\tau \right\}^{1/2} \leqslant (K^*)^2 \frac{t}{\sqrt{2}} \rho(\xi(\cdot), \eta(\cdot)).$$

Переходя к максимуму по t в обеих частях, получаем

$$\rho((U^2\xi)(\cdot), (U^2\eta)(\cdot)) \leqslant \sqrt{\frac{(K^{*2}T)^2}{2}} \rho(\xi(\cdot), \eta(\cdot)).$$

Легко видеть, что аналогичные выкладки относительно оператора U^n дадут

$$\rho((U^n\xi)(\cdot), (U^n\eta)(\cdot)) \leqslant \sqrt{\frac{(K^{*2}T)^n}{n!}}\,\rho(\xi(\cdot), \eta(\cdot)).$$

Подбирая n соответствующим образом, можно добиться, чтобы

$$\frac{[(K^*)^2 T]^n}{n!} < 1.$$

Это и означает, что U^n — сжимающий оператор. Теорема доказана.

В дальнейшем воспользуемся следующим фактом. Пусть $\varphi(t)$ и $\alpha(t)$ — измеримые ограниченные функции и при некотором L выполняется неравенство

$$\varphi(t) \leqslant \alpha(t) + L\int_0^t \varphi(s)\,ds.$$

Тогда $\varphi(t) \leqslant \alpha(t)\,L\int_0^t e^{L(t-s)}\,\alpha(s)\,ds.$

Теорема 2. Пусть для функций, входящих в уравнение (1), выполнены условия 1)—3) теоремы 1,а условие 4) заменено следующим:

$$4')\ \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T} |K_i(t, \tau)| > N\} = 0.$$

Тогда существует единственное решение уравнения (1) в пространстве П, подчиненное потоку $\{\mathfrak{F}_t\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале докажем существование решения. Положим,

$$\tau_N = \inf\{s: \sup_{s\leqslant t\leqslant T} |K_i(t, s)| > N,\ i = 1, 2\},$$

где τ_N — момент остановки относительно потока σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_s\}$.

Построим матрицы $K_i^N(t, s)$ так, чтобы они совпадали с $K_i(t, s)$ до момента τ_N, были ограничены константой N $(|K_i(t, s)| < N)$ и чтобы элементы этих матриц являлись стохастически непрерывными по t $(\tau < t)$ функциями.

Введем решение $\xi_N(t)$ уравнения

$$\xi_N(t) = h(t) + \int_0^t K_1^N(t, \tau) f_1(\tau, \xi_N(\tau))\,d\tau + \int_0^t K_2^N(t, \tau) f_2(\tau, \xi_N(\tau))\,dw(\tau) \qquad (2)$$

В силу теоремы 1 такое решение существует.

Пусть

$$\chi_N(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leqslant \tau_N; \\ 0 & \text{при } t > \tau_N. \end{cases}$$

Докажем, что $\xi_N(t) = \xi_{N+1}(t) = \ldots$ при $t \leqslant \tau_N$. Действительно,

$$\mathbf{M}\chi_N(t)\,\frac{|\xi_N(t) - \xi_{N+m}(t)|^2}{1 + |\xi_N(t) - \xi_{N+m}(t)|^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathbf{M}\chi_N(t)\left|\int_0^t [K_1^N(t, s) f_1(s, \xi_N(s)) - K_1^{N+m}(t, s) f_1(s, \xi_{N+m}(s))]\,ds\right|^2 +$$

$$+ 2\mathbf{M}\chi_N(t)\left|\int_0^t [K_2^N(t, s) f_2(s, \xi_N(s)) - K_2^{N+m}(t, s) f_2(s, \xi_{N+m}(s))]\,dw(s)\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2t \int_0^t \mathbf{M}\chi_N(s)\,[K_1^N(t, s) f_1(s, \xi_N(s)) - K_1^{N+m}(t, s) f_1(s, \xi_{N+m}(s))]^2\,ds +$$

$$+ 2\int_0^t \mathbf{M}\chi_N(s)\,[K_2^N(t, s) f_2(s, \xi_N(s)) - K_2^{N+m}(t, s) f_2(s, \xi_{N+m}(s))]^2\,ds.$$

Но здесь

$$\chi_N(s)\,[K_i^N(t, s) f_i(s, \xi_N(s)) - K_i^{N+m}(t, s) f_i(s, \xi_{N+m}(s))]^2 =$$

$$= \chi_N(s)\,K_i^2(t, s)\,[f_i(s, \xi_N(s)) - f_i(s, \xi_{N+m}(s))]^2 \leqslant$$

$$\leqslant N^2C^2C_i^*\,\frac{|\xi_N(s) - \xi_{N+m}(s)|^2}{1 + |\xi_N(s) - \xi_{N+m}(s)|^2}\,\chi_N(s),$$

где

$$C_i^* = \begin{cases} nd & \text{при } i = 1, \\ md & \text{при } i = 2. \end{cases}$$

Если обозначим

$$v_N(t) = \mathbf{M}\chi_N(t)\,\frac{|\xi_N(t) - \xi_{N+m}(t)|^2}{1 + |\xi_N(t) - \xi_{N+m}(t)|^2},$$

то получим

$$v_N(t) = 2N^2C^2(tC_1^* + C_2^*)\int_0^t v_N(s)\,ds.$$

Учитывая замечание перед теоремой, имеем $v_N(t) = 0$. Следовательно, $\chi_N(t)\,|\xi_N(t) - \xi_{N+m}(t)| = 0$ с вероятностью 1. Но с вероятностью 1 $\chi_N(t) = 1$ при фиксированном $t \in [0, T]$ и достаточно большом N, $N \geqslant N_0 = N_0(\omega)$. Таким образом, с вероятностью 1

$$\xi_{N_0}(t) = \xi_{N_0+1}(t) = \ldots = \xi_n(t) = \ldots$$

Обозначим общее значение через $\xi(t)$. Теперь легко доказать существование решения. С этой целью в уравнении (2) перейдем к пределу при $N \to \infty$. В левой части получим $\xi(t)$. В правой части при заданном t с вероятностью 1 имеем

$$\int_0 K_1^N(t, s) f_1(s, \xi_N(s))\,ds = \int_0^t K_1(t, s) f_1(s, \xi(s))\,ds$$

при $N > N_0$, а для второго интеграла

$$\mathbf{M}\left[\int_0^t K_2^n(t, s) f_2(s, \xi_N(s))\,dw(s) - \int_0^t K_2^{N+m}(t, s) f_2(s, \xi_{N+m}(s))\,dw(s)\right]^2 =$$

$$= \int_0 \mathbf{M}\,[K_2^N(t, s) f_2(s, \xi_N(s)) - K_2^{N+m}(t, s) f_2(s, \xi_{N+m}(s))]^2\,ds = 0$$

при $N > N_0$.

Таким образом, функция $\xi(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1) при каждом t.

Докажем единственность. Пусть $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — решения уравнения (1), т. е.

$$\xi(t) = h(t) + \int_0^t K_1(t, s) f_1(s, \xi(s))\,ds + \int_0^t K_2(t, s) f_2(s, \xi(s))\,dw(s);$$

$$\eta(t) = h(t) + \int_0^t K_1(t, s) f_1(s, \eta(s))\,ds + \int_0^t K_2(t, s) f_2(s, \eta(s))\,dw(s).$$

Положим $\sigma_N = \inf\{t: (|\xi(t)| \geqslant N) \cup (|\eta(t)| \geqslant N)\}$ и введем функцию

$$\chi'_N(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leqslant \sigma_N; \\ 0 & \text{при } t > \sigma_N. \end{cases}$$

Тогда величина $|\xi(t) - \eta(t)| \chi_N(t) \chi'_N(t)$ ограничена (здесь $\chi_N(t)$ имеют смысл, введенный в доказательстве существования решения). Следовательно,

$$\mathbf{M}\chi_N(t)\chi'_N(t)\frac{[\xi(t)-\eta(t)]^2}{1+|\xi(t)-\eta(t)|^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2t\mathbf{M}\int_0^t \chi'_N(t)\chi_N(s)|K_1(t, s)|^2 C^2 C_1^{*2}\frac{[\xi(s)-\eta(s)]^2}{1+|\xi(s)-\eta(s)|^2}ds +$$

$$+ 2\mathbf{M}\int_0^t \chi_N(s)\chi'_N(s)|K_2(t, s)|^2 C^2 C_2^{*2}\frac{[\xi(s)-\eta(s)]^2}{1+|\xi(s)-\eta(s)|^2}ds \leqslant$$

$$\leqslant C^*\int_0^t \mathbf{M}\chi'_N(s)\chi_N(s)\frac{|\xi(s)-\eta(s)|^2}{1+|\xi(s)-\eta(s)|^2}ds.$$

Отсюда $\chi'_N(t)\chi_N(t)[\xi(t)-\eta(t)]^2 = 0$ с вероятностью 1. Рассуждая, как и ранее, получаем $\xi(t) = \eta(t)$ с вероятностью 1 при фиксированном $t \in [0, T]$.

Теорема доказана.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР

Поступила в редколлегию
12.12.77