УДК 519.852.35

Д.С. Шахов, В.В. Бойко
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк
кафедра автоматики и телекоммуникаций
E-mail: dimshahov@gmail.com, glorytown@mail.ru

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА РАСЧЕТА ГРАФА СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ СВЯЗИ

Аннотация
Шахов Д.С., Бойко В.В. Разработка алгоритма расчета графа сложной структуры при оптимизации систем связи. *Выполнен анализ влияния различных ветвей графа на конечный результат. Обоснован выбор узлов для преобразований. Найдены аналитические выражения заниженных и завышенных оценок истинного решения графа. Определен алгоритм нахождения минимальной области допустимых решений для двойного мостикового графа.*
Ключевые слова: *мостиковый граф, истинное решение, область допустимых решений, эквивалентные замены, узел, ребро.*

Общая постановка проблемы.

При построении разнообразных систем массового обслуживания, в том числе телекоммуникационных, важнейшей задачей является оптимизация системы по критерию качество/затраты. Именно на основании результатов этой оптимизации принимаются окончательные проектные решения. Для обоснования принятия проектных решений необходима достоверная математическая модель. Эта модель так же должна наглядно представлять зависимость между качеством и затратами посредством описания связей структурных элементов схемы. Таким требованиям удовлетворяет модель на базе ориентированных вероятностных графов, которая, хотя и не является математически строгой, но дает хороший инструмент для оптимизации [1, гл.5.2.2-5.2.3].

В математике существуют аналитические решения для простых графов и описаны правила простых преобразований (объединение параллельных, последовательных ветвей) [2]. Благодаря этому инструментарию можно решить огромное количество разнообразных графов. Но существуют сложные структуры, которые описываются графами, не имеющими аналитического решения, и их нельзя свести простыми преобразованиями к графам с точным решением. Примером может послужить двойной мостиковый граф (рисунок 1), который встречается при расчете цифровых коммутационных полей. На этом графе вершины "A","b","c","d","e","F" отображают звенья коммутационного поля, а ребра $''w1'', ''w2'', ''w3'', ''w4'', ''w5''$ – величины потерь телефонной нагрузки при прохождении соединения от одного звена к другому. Точка "A" является источником потока, а точка "F" – получателем. Число "n" отображает количество путей на выходе звена "A", число "m" – на выходе звена "b", число "k" – на выходе "c", а начиная со звена "d" потоки сходятся, и у каждого звена имеется только один исходящий путь.

Сложность вычисления этого графа можно пояснить простым примером. Пусть количество путей $m = n = k = 2$; возможное состояние каждого ребра – 0 (свободно) и 1 (занято). Даже для таких простых параметров будет возможно 1048576 состояний графа. При этом с линейным ростом параметров m, n, k число возможных состояний растет экспоненциально. Определить все возможные варианты, которые будут соответствовать прохождению сообщения – задача класса NP [3]. Поэтому на практике данный граф не решается в чистом виде, а производятся эквивалентные замены, что позволяет преобразовать его к простому графу с аналитическим решением. Эквивалентные замены искажают исходный граф, поэтому получаемый результат не является истинным решением, а всего лишь приближенной оценкой. Имея несколько приближенных завышенных и заниженных оценок можно определить окрестность допустимых решений.

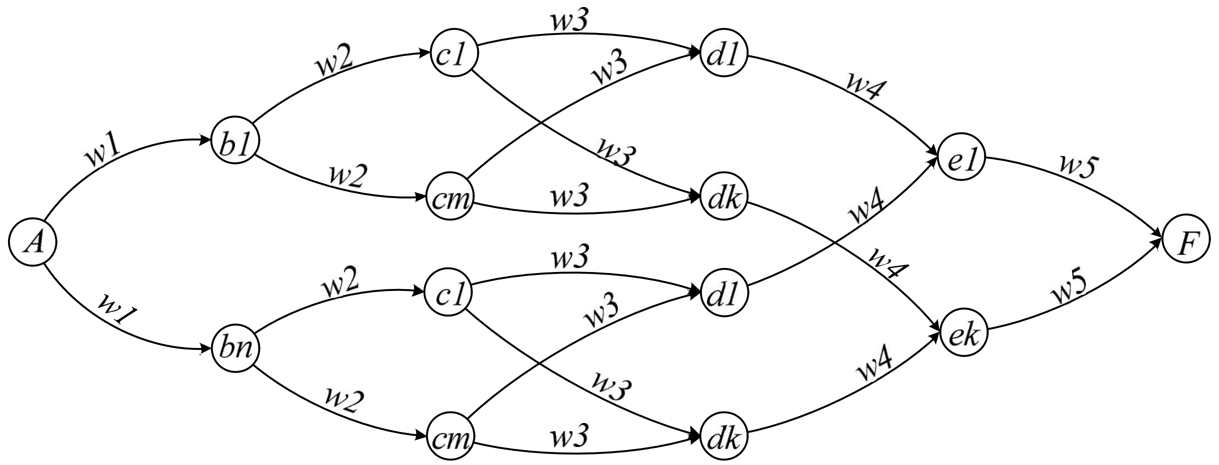

Рисунок 1 – Двойной мостиковый граф

Цель работы и постановка задач исследования.

Множество возможных эквивалентных замен приводит к неоднозначному определению границ области допустимых решений. Кроме того остается актуальной задача приближения оценок к истинному значению. Целью данной работы является описание алгоритма нахождения минимальной области допустимых решений для двойного мостикового графа. Для выполнения поставленной цели необходимо решить задачи:

1. Предложить оптимальный выбор узлов для преобразования, чтобы минимально исказить оценку относительно истинного решения.
2. После преобразований найти завышенные и заниженные оценки, которые дают наименьшие отклонения от истинного решения.

Решение задач и результаты исследования.

При эквивалентных заменах мы сводим составные ветви графа к упрощенным одиночным ветвям, при этом нарушая исходную структуру, так как либо увеличиваем, либо уменьшаем число обходных путей. Это происходит потому, что количество некоторых ребер, входящих в состав составной ветви, при упрощении увеличивается (уменьшается). Следует учитывать, что изменение структуры в начале и в конце графа делает очень весомым влияние каждого ребра на истинный результат – в этих точках имеется небольшое количество обходных путей. В свою очередь ребро центральных узлов имеет самый малый удельный вес в конечном результате, что позволяет не сильно отклоняться от истинного решения при преобразовании. Опираясь на заключения, приведенные выше, и представленный граф, можно сделать вывод, что наиболее малым влиянием на истинный результат играет любое ребро между узлами "c" и "d". Тогда рационально будет преобразовать либо узел "c", либо "d".

Преобразуем узлы "C", при этом заменяя одну точку "c" эквивалентными k точками "c" (рисунок 2). Это преобразование увеличит число ребер "b – c" в k раз, из этого следует, что полученная нами в дальнейшем оценка величины потерь будет заниженная.

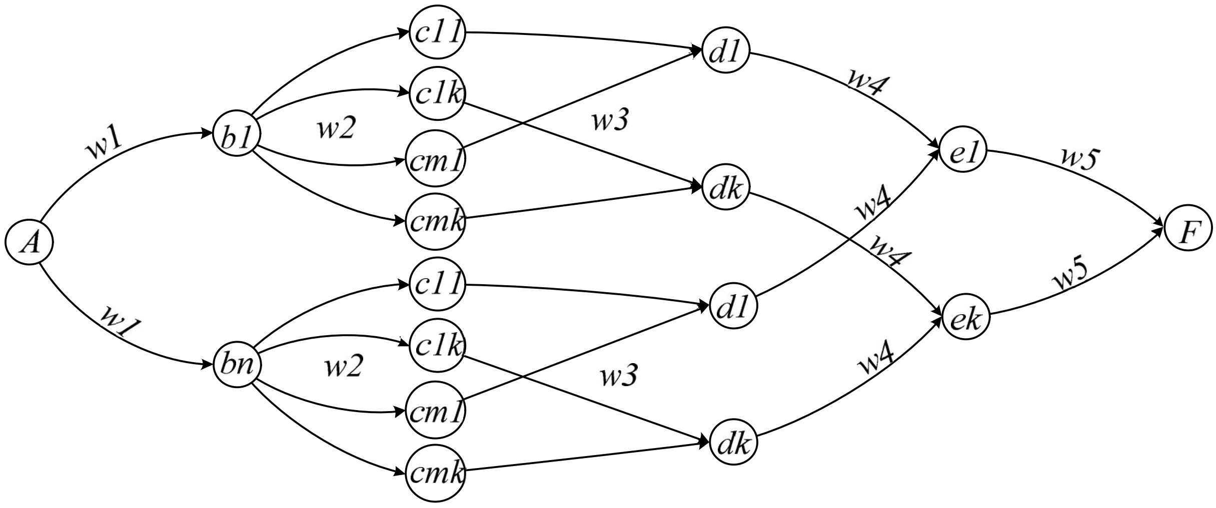

Рисунок 2 – Эквивалентное преобразование узлов "C"

Проведем простые преобразования и получим граф, показанный на рисунке 3, при этом:

$$w(bd) = 1 - (1 - w2) \cdot (1 - w3)\,. \tag{1}$$

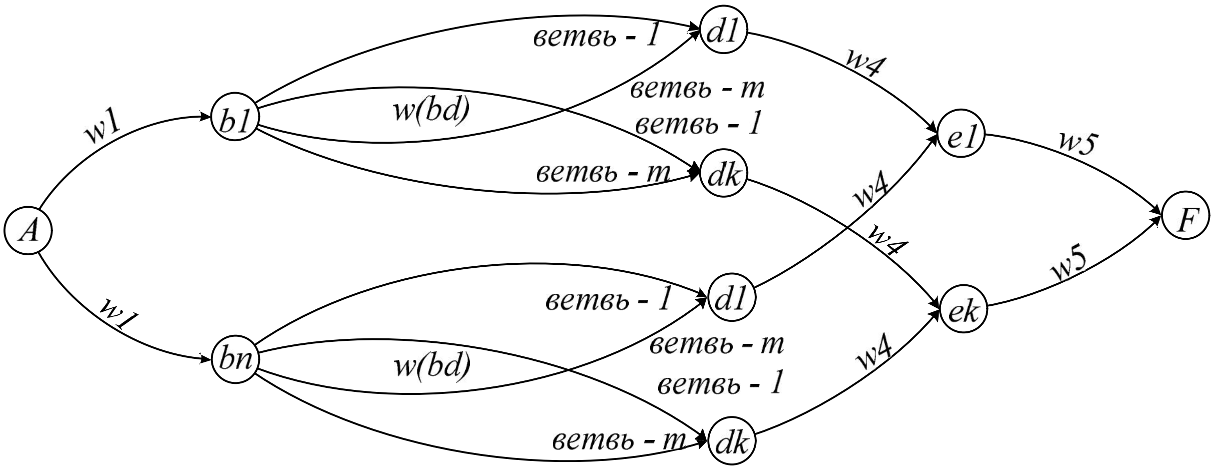

Рисунок 3 – Граф после преобразования ветвей "b - d"

Полученный граф можно легко свести к одинарному мостиковому графу, который имеет аналитическое решение [4]. Но так как число обходных путей было увеличено, то результатом вычислений станет заниженная оценка величины потерь. Исходно между точками "B"–"D" было $k * m$ путей. Если уменьшим число параллельных ветвей $"b"_i – "d"_j$ с m до 1, то соответственно уменьшим и число путей до k, таким образом, получим завышенную оценку. Приведем формулу завышенной и заниженной оценки, при исходном преобразовании узла "c":

$$P_{заниж.C} = \sum_{x=1}^{k} (C_k^x \cdot w5^{k-x} \cdot (1 - w5)^x \cdot (w1 + (1 - (1 - w(bd)^m) \cdot (1 - w4))^x \cdot (1 - w1))^n)\,, \tag{2}$$

$$P_{завыш.C} = \sum_{x=1}^{k} (C_k^x \cdot w5^{k-x} \cdot (1 - w5)^x \cdot (w1 + (1 - (1 - w2) \cdot (1 - w3) \cdot (1 - w4))^x \cdot (1 - w1))^n)\,. \tag{3}$$

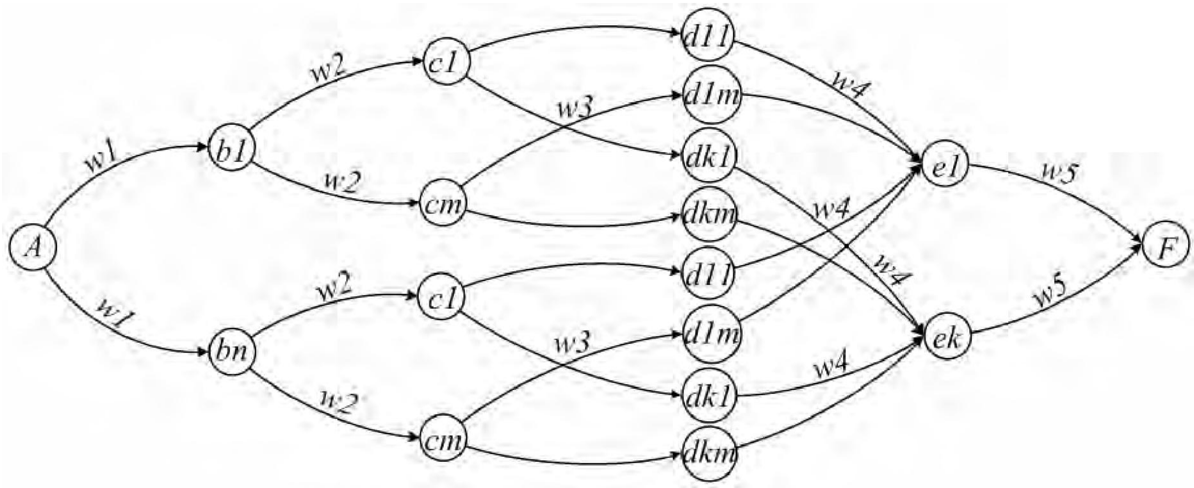

Рисунок 4 – Эквивалентное преобразование узлов "D"

Теперь вернемся к исходному графу и преобразуем узлы "D", при этом заменяя одну точку "d" эквивалентными m точками "d" (рисунок 4). Это преобразование увеличит число ребер "d - e" в m раз, из чего следует, что полученная нами оценка будет заниженная. Сразу произведем простые преобразования ветвей "c - e":

$$w(ce) = 1 - (1 - w3) \cdot (1 - w4)\,. \tag{4}$$

Теперь объединим в каждой n-группе все узлы "c" воедино (рисунок 5). Таким образом, мы сохраним доступность узла "b". Но это еще больше увеличит число обходных путей "c - d".

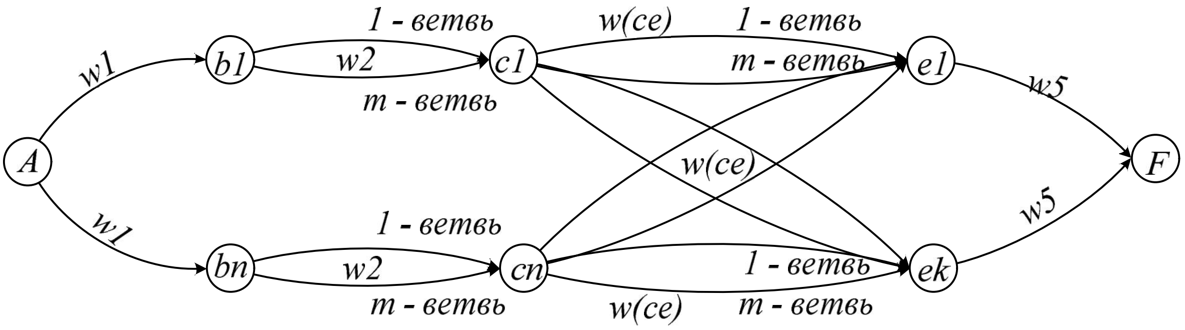

Рисунок 5 – Граф после преобразования ветвей "c - e" и объединения узлов "c"

Дальше легко преобразовать граф до одинарного мостикового графа и получить заниженную оценку. Для получения завышенной оценки достаточно восстановить значение доступности узла "e", равное n, т.е. уменьшить число параллельных ветвей "c"$_i$–"e"$_j$ с m до 1. Стоит отметить, что данная завышенная оценка будет очень близка к истинной, так как мы не учитываем полностью только влияние ребер "c - e". Приведем формулу завышенной и заниженной оценки, при исходном преобразовании узлов "D":

$$P_{заниж.D} = \sum_{x=1}^{k} (C_k^x \cdot w5^{k-x} \cdot (1-w5)^x \cdot (1-(1-w1)\cdot(1-w2^m) + w(ce)^{x\cdot m} \cdot (1-w1)\cdot(1-w2^m))^n)\,, \tag{5}$$

$$P_{завыш.D} = \sum_{x=1}^{k} (C_k^x \cdot w5^{k-x} \cdot (1-w5)^x \cdot (1-(1-w1)\cdot(1-w2^m) + w(ce)^{x} \cdot (1-w1)\cdot(1-w2^m))^n)\,. \tag{6}$$

Покажем на примерах применение описанной методики. Пусть в случае а) $k = 30, n = 10, m = 14$; б) $k = 30, n = 14, m = 10$; в) $k = 15, n = 5, m = 7$; и в случае г) $k = 15, n = 7, m = 5$. Расчёты и все данные представим в таблице.

Таблица 1 – Результаты расчетов

Опыт	w1,w5	w2-w4	n	M	k	Кпутей	Заниж.C	Завыш.C	Заниж.D	Завыш.D
а)	0,670	0,479	10	14	30	4200	0,0002	0,044	0,013	0,018
б)	0,670	0,938	14	10	30	4200	0,865	0,985	0,499	0,918
в)	0,670	0,479	5	7	15	525	0,018	0,295	0,100	0,181
г)	0,670	0,938	7	5	15	525	0,965	0,991	0,938	0,982

Из таблицы видно (рисунки 6,7), что нельзя однозначно определить какое из преобразований будет давать наиболее близкое приближение к истинному результату, так как на это сильно влияют соотношения параметров $k:n:m$ и величины нагрузки ребер. Исходя из этого, можно сделать вывод, что после проведенных преобразований и получения всех завышенных и заниженных оценок, необходимо для минимизации области допустимых решений выбрать минимальную оценку среди всех завышенных и максимальную среди всех заниженных.

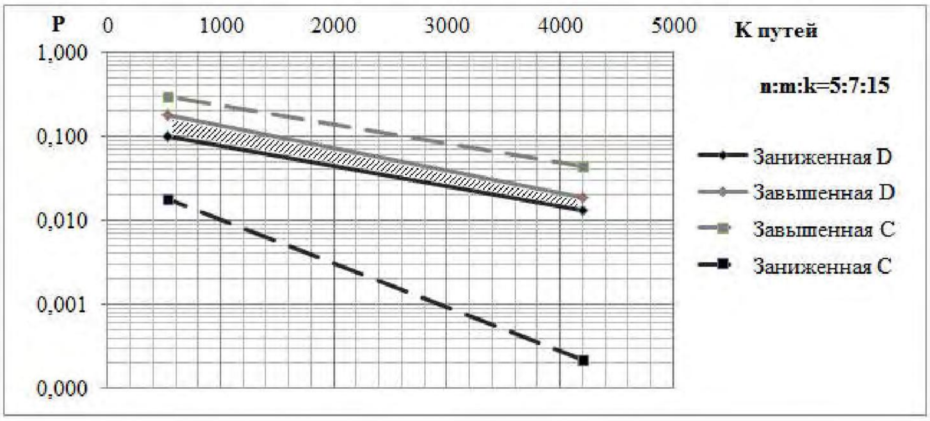

Рисунок 6 – График области допустимых решений для соотношения $n:m:k = 5:7:15$

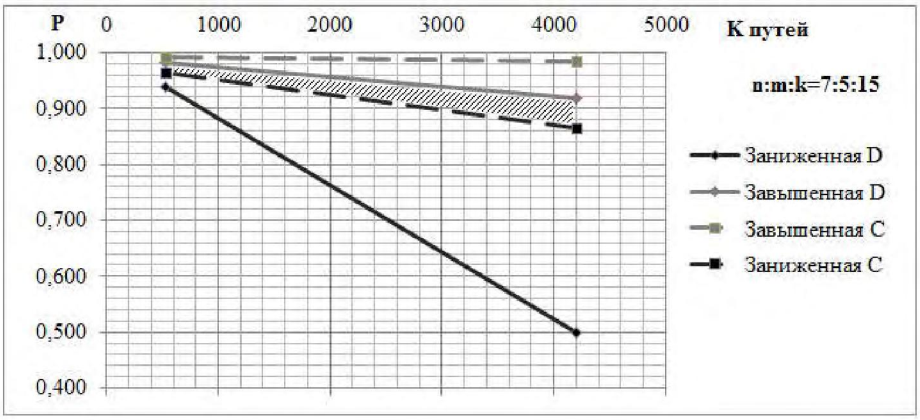

Рисунок 7 – График области допустимых решений для соотношения $n:m:k = 7:5:15$

Выводы.

Была разработана методика расчета двойного мостикового графа методом оценок:

1. Произвести эквивалентное преобразование узла C исходного графа, как продемонстрировано на рисунке 2.
2. Для полученного графа рассчитать заниженную (2) и завышенную (3) оценку, учитывая простое преобразование последовательно соединенных ребер (1), рисунок 3.

3. Произвести эквивалентное преобразование узла D исходного графа, как продемонстрировано на рисунке 4.
4. Для полученного графа рассчитать заниженную (5) и завышенную (6) оценку, учитывая простое преобразование последовательно соединенных ребер (4) и объединение узлов C в каждой n-группе, рисунок 5.
5. Выберем минимальную оценку среди всех завышенных оценок и максимальную среди всех заниженных оценок.
6. Определим искомую область допустимых решений заданного двойного мостикового графа.

Эта методика позволяет определить минимальную область допустимых решений. Это достигается с одной стороны благодаря внесению погрешности преобразования графа только для расчета участка центральных ребер, которые меньше всех остальных ребер влияют на предыдущие последующие звенья пути, т.е. минимизируется искажение результата из-за вносимых замен. С другой стороны учитывается влияние как левой, так и правой стороны графа, что позволяет находить оптимальную область при любом соотношении параметров k, m, n и веса ребер.

Литература

1. Беллами Дж.К. Цифровая телефония / Дж.К. Беллами. – М.: Эко-Трендз, 2004. – 640 с.

2. Басакер Р.Дж. Конечные графы и сети / Р.Дж. Басакер, Т.Л. Саати. – М.: Наука, 1974. – 367 с.

3. Класс сложности NP [Электронный ресурс] / Wikimedia Foundation, Inc. – Свободный доступ из сети Интернет. – http://ru.wikipedia.org/wiki/NP-трудная_задача. – (15.02.2011).

4. Лекции по курсу "Теория телетрафика" [Электронный ресурс] / Ульяновский государственный технический университет. – Свободный доступ из сети Интернет. – http://sernam.ru/lect_t.php. – (15.02.2011).

Надійшла до редакції: 18.02.2011

Рекомендовано до друку: д-р техн. наук, проф. Чичикало Н.І.

Abstract
Shakhov D.S., Boyko V.V. Development of algorithm for calculating a graph of complex structure in the optimization of communications systems. *Analyse of various bonds of the graph on the final result was completed. The choice of nodes of change was substantiated. Analytical expressions of evaluations of true solution were found, which describe bottom- and top- limit of region of feasible solutions. For twice bridge graph was developed algorithm for finding the minimum feasible region.*
Keywords: *bridge graph, true solutions, feasible region, equivalent changes, node, bond.*

Анотація
Шахов Д.С., Бойко В.В. Розробка алгоритму розрахунку графа складної структури при оптимізації систем зв'язку. *Виконано аналіз впливу різних ребер графа на кінцевий результат. Обґрунтовано вибір вузлів для перетворень. Знайдено аналітичні вирази занижених та завищених оцінок рішення графа. Розроблено алгоритм визначення найменшої області припустимих рішень для подвійного місткового графа.*
Ключові слова: *містковий граф, істинне рішення, область припустимих значень, еквівалентні заміни, вузол, ребро.*