УДК: 681.51.015.4

В.І. Бессараб, А.О. Воропаєва, В.М. Лозинська
Донецький національний технічний університет, м. Донецьк
кафедра автоматики та телекомунікацій
E-mail: voropaeva_anna@meta.ua

АНАЛІЗ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКРЕТНО-БЕЗПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ ПРИ ЗАСТОСУВАННІ КРИТИЧНОГО ГРАФА ДИНАМІКИ

Анотація
Бессараб В.І., Воропаєва А.О., Лозинська В.М. Аналіз частотних характеристик дискретно-безперервних систем при застосуванні критичного графа динаміки*. Розглянуто аналог відомої теорії Перрона-Фробеніуса в частині її застосування до особливостей представлення моделей дискретно-безперервних систем. Сформулювано необхідні і достатні умови збіжності степенів власної матриці. Усі твердження розглядаються на прикладах.*
Ключові слова: *вектор стану, матриця динаміки, дискретно-безперервна система, циклічність матриці.*

Застосування апарату Max-plus алгебри до моделювання дискретно-безперервних систем.

В раніше опублікованих роботах [1,2], показано, що один з різновидів ідемпотентної алгебри, а саме Max-plus алгебри, дозволяє отримувати моделі дискретно-безперервних систем (ДБС) в формі аналітичних рівнянь в просторі стану з урахуванням особливостей представлення динаміки дискретно-безперервних явищ. В векторно-матричній формі таке представлення має класичний вид:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} \oplus \mathbf{B}\,\mathbf{u} \qquad (1)$$

При цьому:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

– вектор стану, кожний елемент x_i якого фіксує момент часу маркування (включення) переходу S_i.

Вплив зовнішніх логічних умов маркування (переключення) задається за допомогою вектора керування:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}.$$

A, B – матриці динаміки і керування відповідно.

Кожна логічна умова маркування (переключення) переходу S_i стає дійною в деякій часовій точці розвитку процесу, яка також враховується в рівняннях. В цьому сенсі кожний окремий елемент u_i, $i = 1, \ldots, p$ вектора керування управління розглядається як управляючий вплив на i-й перехід.

Аналіз поведінки дискретно-безперервної системи.

Розглянемо аналог відомої теорії Перрона-Фробеніуса [5] в частині її застосування до особливостей представлення моделей ДБС. Предметом розгляду є поведінка системи, якій відповідає матриця динаміки $\mathbf{A}$, на значному часовому інтервалі спостереження, зокрема питання зміни властивостей матриці $\mathbf{A}^k$ при великому значенні k.

Приймаючи до уваги, що $\mathbf{A}$ є $n \times n$ матриця, яка визначена в $R_{\max}$, для зручності введемо обмеження на структуру графа $G(\mathbf{A})$. Припустимо, що в графі є щонайменш один замкнутий контур, в іншому випадку матриця $\mathbf{A}$ є нільпотентною і $\mathbf{A}^k = \mathbf{e}$ для досить великих k ($\varepsilon = 0, \mathbf{e} = -\infty$ - специфічні позначення Max-plus алгебри). Також будемо вважати, що вага замкнутого контуру дорівнює e. Якщо це не так, то матрицю $\mathbf{A}$ можна нормалізувати шляхом розділення всіх її елементів на величину власного числа матриці λ. В цьому випадку поведінка системи може бути описана формулою перетворень:

$$\mathbf{A}^k = \lambda^k (\lambda^{-1}\mathbf{A})^k . \qquad (2)$$

При такому представленні ДБС завідомо має контури з від'ємною вагою, причому деякі з них матимуть вагу, що дорівнює e. Це означає, що для нормалізованої матриці $\mathbf{A}$ власне число завжди дорівнює e.

При аналізі частотних властивостей ДБС досить широко застосовуються особливі характеристики і поняття, які в загальному випадку мають назву критичні графи нормалізованої матриці $\mathbf{A}$ [3]. Зокрема, замкнутий контур ξ графа $G(\mathbf{A})$ називається критичним, якщо він має максимальну вагу $|\xi|_W = e$. Граф $G^C(\mathbf{A})$ називається критичним, якщо він має тільки ті вершини і дуги $G(\mathbf{A})$, які належать критичному контуру цього графа. Множина вершин критичного контуру позначається ν^C. Насиченим називають граф $S(\mathbf{A}, \mathbf{y})$, який містить вершини і дуги графа $G(\mathbf{A})$, для яких $A_{ij} y_j = y_i$, причому $y_i, y_j \neq \varepsilon$. Циклічність максимально повнозв'язного підграфа – це найбільший спільний дільник (НСД) довжин всіх його контурів, а циклічність $C(G)$ графа $G(\mathbf{A})$ – найменше спільне кратне (НСК) циклічностей всіх його підграфів [3].

Вищенаведені поняття і визначення можна проілюструвати на прикладах.

Припустимо задана нормалізована матриця $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e & e & \varepsilon & \varepsilon \\ -1 & -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & -1 & e \\ \varepsilon & \varepsilon & e & e \end{bmatrix}.$$

Граф $G(\mathbf{A})$ для цієї матриці має такий вигляд.

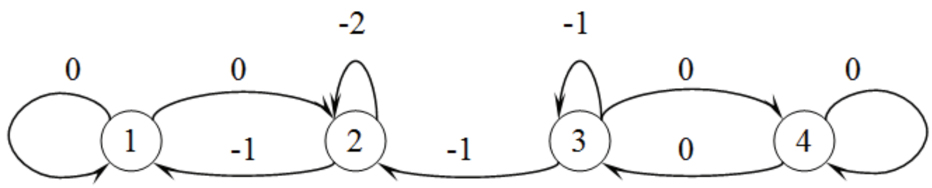

Рисунок 1 – Структура графа $G(\mathbf{A})$

Граф $G(\mathbf{A})$ має три критичні конури – $\{1\}, \{3,4\}, \{4\}$.

Критичному графу $G^C(\mathbf{A})$ відповідає наступна матриця $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & e & e \end{bmatrix}.$$

Матриця $\mathbf{A}$ має власний вектор $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} e & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, що відповідає власному числу $\lambda = e$. Тоді граф насичення S для матриці $\mathbf{A}$ буде мати вигляд:

$$S = S(\mathbf{A}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & e & e \end{bmatrix}.$$

Циклічність графа $G(\mathbf{A})$ може бути оцінена в такий спосіб.

Критичний граф $G^C(\mathbf{A})$ має два жорстко повнозв'язні підграфи з вершинами $\{1\}$ і $\{3,4\}$ відповідно. Другий підграф має два критичні контури $\{4\}$ і $\{3,4\}$ довжиною 1 і 2 відповідно. Циклічність першого підграфа дорівнює 1, циклічність другого також 1, тому що НСД $(1, 2) = 1$. Тоді циклічність $G^C(\mathbf{A})$ є НСК $(1, 1) = 1$.

Узагальнюючи ці результати у наведених прикладах, можна сформулювати наступні твердження, що мають важливе значення при розгляді частотних процесів у ДБС. Так, будь-який контур критичного графа $G^C(\mathbf{A})$ є критичним. Також, якщо взяти будь-яку пару вершин матриці $G^C(\mathbf{A})$, то шляхи, які з'єднують вершини i та j у критичному графі мають однакову вагу.

Для аналізу частотних властивостей ДБС також представляє інтерес множина власних векторів матриці $\mathbf{A}$, пов'язаних з її власним числом, яке для нормалізованого представлення завжди дорівнює e. Ця множина має назву модулятора частотних властивостей ДБС. В цьому сенсі множина стовпців власних векторів матриці $\mathbf{A}$ розглядається як генератор цього модулятора і позначається як матриця $\mathbf{A}^+$, для якої є справедливими такі твердження:

якщо $\mathbf{y}$ – власний вектор матриці $\mathbf{A}$, то він також є власним вектором матриці $\mathbf{A}^+$, причому це є лінійна комбінація стовпців $(\mathbf{A}^+)_{\bullet i}$, де $i \in \nu^C$.

$$\mathbf{y} = \bigoplus_{i \in \nu^C} y_i (\mathbf{A}^+)_{\bullet i} \tag{3}$$

якщо найдовший контур матриці $\mathbf{A}$ має вагу (власне число) e, то будь-який власний вектор, пов'язаний з цим числом, є лінійною комбінацією з $N_{\mathbf{A}}^C$ стовпців матриці $\mathbf{A}^+$. В цьому трактуванні $N_{\mathbf{A}}^C$ – це число підграфів в критичному графі $G^C(\mathbf{A})$.

З вище наведених тверджень витікають наслідки, які мають практичне застосування:

1. всі стовпці матриці $\mathbf{A}^+$ є власними векторами матриці $\mathbf{A}$, тобто $(\mathbf{A}^+)_{\bullet i}$, $i \in \nu^C$ – власні вектори;
2. для вузлів i та j, що належать одному й тому ж підграфу критичного графу $G^C(\mathbf{A})$, справедливим є твердження про пропорційність $(\mathbf{A}^+)_{\bullet i}$ та $(\mathbf{A}^+)_{\bullet j}$;

3. жоден з власних векторів (стовпців матриці $(\mathbf{A}^+)_{\bullet i}$) не може бути виражений як лінійна комбінація стовпців $(\mathbf{A}^+)_{\bullet j}$, які одержані тільки з тих вузлів j, що належать до множини ν^C підграфа $G^C(\mathbf{A})$, відмінних від i.

Ці практичні висновки також можна проілюструвати прикладом.

Для нормалізованої матриці $\mathbf{A}$ графа $G(\mathbf{A})$ відповідна матриця $\mathbf{A}^+$ має вид:

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} e & e & \varepsilon & \varepsilon \\ -1 & -1 & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & -1 & e & e \\ -2 & -1 & e & e \end{bmatrix}.$$

Вузли 1, 3, 4 належать до критичного графу $G^C(\mathbf{A})$, в якому є два підграфи, зокрема $\{1\}$ і $\{3,4\}$. Стовпці 1 і 3 є незалежними власними векторами матриці $\mathbf{A}$. Стовпець 4 є еквівалентним стовпцю 3.

Для нормалізованої матриці $\mathbf{A}$ графа $G(\mathbf{A})$ також може бути визначена частотна проекція. Частотна проекція $\mathbf{A}$ визначається як деяка матриця $\mathbf{Q}$, яка задовольняє наступним умовам:

$$\mathbf{AQ} = \mathbf{QA} = \mathbf{Q}^2. \tag{4}$$

З урахуванням властивостей матриці $\mathbf{A}^+$ можна стверджувати, що матриця:

$$(\mathbf{Q})_i = (\mathbf{A}^+)_{\bullet i}(\mathbf{A}^+)_{i\bullet}, \qquad i \in \nu^C \tag{5}$$

є складовою частиною частотної проекції матриці $\mathbf{A}$. Тоді повна проекція:

$$\mathbf{Q} = \bigoplus_{i \in \nu^C} (\mathbf{Q})_i \tag{6}$$

Для раніше розглянутого прикладу елементарні складові та повна частотна проекція матриці $\mathbf{A}$ визначається в такий спосіб:

$$(\mathbf{Q})_1 = \begin{bmatrix} e \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & e & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & e & \varepsilon & \varepsilon \\ -1 & -1 & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & -2 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{Q})_{3,4} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ e \\ e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & e & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & -1 & e & e \\ -2 & -1 & e & e \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q})_1 \oplus (\mathbf{Q})_{3,4} = \begin{bmatrix} e & e & \varepsilon & \varepsilon \\ -1 & -1 & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & -1 & e & e \\ -2 & -1 & e & e \end{bmatrix}.$$

Результати дослідження.

З урахуванням вище наведених визначень і зауважень можна сформулювати необхідні і достатні умови збіжності степенів матриці $\mathbf{A}$. Існують різні підходи при розгляді цього питання. Найбільш повно ці умови сформульовані в [5] і полягають в наступному:

Для матриці $\mathbf{A}$ розмірності $n \times n$ при $n \to \infty$

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{A}^k = \mathbf{Q} \tag{7}$$

за умови, що циклічність будь-якого з підграфів критичного графу $G^C(\mathbf{A})$ дорівнює 1.

Якщо n має строго визначене скінчене значення $(n<\infty)$, то існує таке число K, що $\forall k\ge \mathrm{K}$: $\mathbf{A}^k = \mathbf{Q}$ за умови, що циклічність кожного з підграфів графу $G^C(\mathbf{A})$ дорівнює 1.

Нехай $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} e & e & \varepsilon & \varepsilon \\ -1 & -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & -1 & e \\ \varepsilon & \varepsilon & e & e \end{bmatrix}$, тоді $\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix} e & e & \varepsilon & \varepsilon \\ -1 & -1 & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & -2 & e & e \\ \varepsilon & -1 & e & e \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{A}^3=\mathbf{A}^4=\begin{bmatrix} e & e & \varepsilon & \varepsilon \\ -1 & -1 & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & -1 & e & e \\ -2 & -1 & e & e \end{bmatrix}.$$

При $k\ge 3$, $\mathbf{A}^k=\mathbf{Q}$. Матриця $\mathbf{Q}$ була розрахована в попередньому прикладі.

В наведеному прикладі періодичний режим в ДБС досягається за скінчене число кроків. Це завжди справедливо для підграфу з вузлами, що належать до критичного графу $G^C(\mathbf{A})$, але невірно для будь-якої матриці $\mathbf{A}$. Наприклад, нехай нормалізована матриця $\mathbf{A}$ має вид:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}.$$

В цьому прикладі є умовний вхід, який наближається до ε. Коли всі входи збігаються до кінцевого значення, періодичний режим може бути досягнутий, але час, необхідний для цього, може бути скільки завгодно великим.

Якщо взяти матрицю $\mathbf{A}$ наступного виду:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -r & -1 \\ e & e \end{bmatrix},$$

за умови, що r відносно невелике дійсне число, то матриця $\mathbf{A}^k$ збігається до матриці

$$\mathbf{A}^k=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ e & e \end{bmatrix},$$

і це досягається лише за $k=1/r$ кроків.

У загальному випадку ця теорія може бути представлена через поняття циклічності матриці. Відомо [3], що матриця $\mathbf{A}$ є абсолютно циклічною, якщо існують такі d і M, що $\forall m\ge M$: $\mathbf{A}^{m+d}=\mathbf{A}^m$, при цьому d називають показником циклічності матриці $\mathbf{A}$, а саму матрицю називають d-циклічною.

Також відомо [3], що матриця $\mathbf{A}$ асимптотично циклічна, якщо існує таке d, що для всіх $\theta\ge 0$ існує таке M, що для всіх $m\ge M$, $\sup_{ij}\left|(\mathbf{A}^{m+d})_{ij}-(\mathbf{A}^m)_{ij}\right|\le\theta$.

У цьому випадку d називають показником асимптотичної циклічності матриці $\mathbf{A}$, а саму матрицю називають d-асимптотично циклічною. Звідси справедливим є твердження, що будь-яка матриця є асимптотично циклічною, якщо в графі є хоча б один замкнений контур. Показник асимптотичної циклічності d матриці $\mathbf{A}$ дорівнює показнику циклічності

ρ критичного графу $G^C(\mathbf{A})$ матриці $\mathbf{A}$. Крім того, якщо $G(\mathbf{A})$ і $G(\mathbf{A}^{\rho})$ зв'язні, то матриця $\mathbf{A}$ має показник циклічності ρ [5].

Висновки.

Частотна модель дискретно-безперервного процесу представленого моделлю в просторі станів за допомогою рівнянь Max-Plus алгебри може бути визначена через циклічність матриці динаміки. Показник циклічної матриці найбільш раціонально розраховувати через критичний граф, який відповідає цій матриці. Введено поняття показника асимптотичної циклічності матриці динаміки і сформульовано умови наявності такої оцінки дискретно-безперервного процесу в загальному випадку.

Література

1. Бессараб В. І. Використання апарата «MAX-PLUS» алгебри для моделювання динаміки в інформаційних иережах із простою топологією / В. І. Бессараб, Є.Г. Коваленко // Наукові праці Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова. – 2007. – Вип. 44. - С. 59 – 62.
2. Бессараб В.І. Аналітична модель дискретно-безперервної системи за застосуванням апарату MAX-PLUS алгебри / В.І. Бессараб, А.О. Воропаєва // 17 міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика-2010». Тези доповідей. – Х.: ХНУРЕ, 2010. – Т. 2. – 306 с., С.90-91.
3. Mossig, K. Einfuerung in die "Max-Plus"-Algebra zur Beschreibung ereignisdiskreter dynamischer Prozesse [Text] / K. Mossig, A. Rehkopf // Automatisierungstechnik. Vol. 44. – Karlsruhe, 1996. – P. 3-9.
4. Olsder, G. J. Eigenvalues of dynamic max-min systems / G. J. Olsder // Discrete Event Dynamic Systems: Theory And Applications. Vol. 1. – Sept. 1991. – P. 177-207.
5. Synchronization and Linearity: An algebra for discrete events systems / F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J.-P. Quadrat. – New York : Wiley, 1992.

Надійшла до редакції: 11.03.2011

Рекомендовано до друку: д-р техн. наук, проф. Скобцов Ю.О.

Abstract

Vladimir Bessarab, Anna Voropaeva, Victoriya Losinskaya. Discrete-continuous systems frequency characteristics analysis using a critical graph dynamics. *An analogue of the well-known Perron-Frobenius theory is described in terms of its application to the peculiarities of representation of models of discrete-continuous systems. A necessary and sufficient conditions for convergence of own matrix degree are formed. All allegations are considered by examples.*

Keywords: *state vector, the matrix of dynamics, discrete-continuous system, the cyclic matrix.*

Аннотация

Бессараб В.И., Воропаева А.А., Лозинская В.Н. Анализ частотных характеристик дискретно-непрерывных систем при использовании критического графа динамики. *Рассмотрены аналог известной теории Перрона-Фробениуса в части ее применения к особенностям представления моделей дискретно-непрерывных систем. Сформулированы необходимые и достаточные условия сходимости степеней собственной матрицы. Все утверждения рассматриваются на примерах.*

Ключевые слова: *вектор состояния, матрица динамики, дискретно-непрерывная система, цикличность матрицы.*