УДК 661.2

В.В. Червинский, С.В. Пазуха
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк
кафедра автоматики и телекоммуникаций
E-mail: tscherwi@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА И ДЕЗИНФЕКЦИИ ВОДЫ В ВАННАХ БАССЕЙНОВ

Аннотация
Червинский В.В., Пазуха С.В. Математическая модель процессов теплообмена и дезинфекции воды в ваннах бассейнов. *Получено описание процессов теплообмена и изменения концентрации дезинфектанта воды в ваннах бассейнов, проведено ранжирование входных и выходных переменных. Разработано математическое описание рассматриваемых процессов аналитическим методом на основе уравнений статических массо- и теплообменов. Получена динамическая модель, проведено моделирование. Показана возможность линеаризации нелинейной математической модели, проведен анализ полученных в результате моделирования характеристик.*
Ключевые слова: *плавательный бассейн, схема ранжирования, математическая модель, расход, концентрация, дезинфекция, передаточная функция.*

Общая постановка проблемы.

Для нормального функционирования плавательного бассейна необходима программа производственного контроля за эксплуатацией бассейна, одним из пунктов которой является контроль за:

- качеством воды;
- параметрами микроклимата;
- состоянием воздушной среды в зоне дыхания пловцов;
- уровнями техногенного шума и освещенности;
- бактериологическими и паразитологическими показателями смывов с поверхностей.

При подготовке программы производственного контроля следует считать, что потенциально опасным фактором, который может оказывать наиболее неблагоприятное влияние на здоровье посетителей бассейна, является качество воды в ваннах.

Отсюда основными задачами управления являются поддержание температуры воды на заданном уровне и контроль качества воды в ваннах бассейнов на соответствие установленным нормам.

Постановка задач исследования.

Для исследования динамических процессов в системе автоматического управления поддержания температуры и качества воды на заданном уровне в ваннах бассейнов необходимо решить следующие задачи:

1) получить описание процессов теплообмена и изменения концентрации дезинфектанта воды в ваннах бассейнов, провести ранжирование входных и выходных переменных;
2) получить уравнения статического баланса рассматриваемых процессов;
3) разработать математическую модель динамики процесса теплообмена и изменения концентрации дезинфектанта воды в ваннах бассейнов;
4) провести моделирование исходного объекта, проанализировать результаты.

Решение задач и результаты исследований.

Все переменные, входящие в наш объект, делятся на управляемые (выходы), управляющие (входы) и возмущающие (возмущения). Рассматриваемый объект характеризуется следующими параметрами:

Tгор – температура горячей воды на входе в бассейн, °С;

Tхол – температура холодной воды на входе в бассейн, °С;

Fгор – расход горячей воды, м^3/мин;

Fхол – расход холодной воды, м^3/мин;

Fcl – расход дезинфектанта, м^3/мин;

Tсм – температура смешанной воды, °С;

Ccl – концентрация дезинфектанта, кг/ м^3.

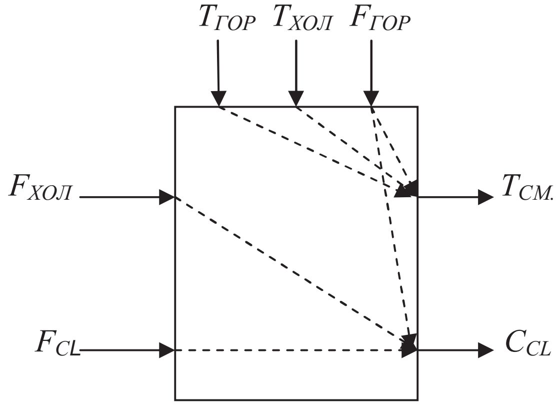


Рисунок 1 —Схема ранжирования входных и выходных переменных процесса

Процесс дезинфекции воды в ваннах бассейнов осуществляется путем ввода в объект дезинфектанта. Модель этого процесса представляет собой модель идеального перемешивания. При этом концентрация распределенного вещества во всех точках объекта и в потоке на выходе из него одинакова.

Для получения математической зависимости, описывающей распределение концентрации дезинфектанта во времени, принимаем следующие обозначения:

$C_{вх}$, $C_{вых}$, C — концентрация дезинфектанта в потоке соответственно на входе, выходе и в любой точке объекта, $кг/м^3$;

V — объем зоны идеального перемешивания, $м^3$;

F_{Cl} — объемная скорость потока (расход дезинфектанта), поступающего в зону идеального перемешивания и выходящего из нее, $м^3/мин$;

T — время, *мин*;

$I_{вх}$, $I_{вых}$, I — поток (количество дезинфектанта) соответственно на входе, выходе и в любом месте объекта , *кг/мин*.

Количество дезинфектанта в общем случае можно представить как произведение расхода на концентрацию:

$$I = F_{cl}C. \tag{1}$$

Для рассматриваемого объекта входной и выходной потоки будут:

$$I_{вх} = F_{Cl}C_{вх}, \tag{2}$$

$$I_{вых} = F_{Cl}C_{вых}. \tag{3}$$

В результате в объекте будет аккумулироваться некоторое количество дезинфектанта ΔM, которое можно представить в интегральной форме таким равенством:

$$\Delta M = \int_0^t \left[I_{вх}(t) - I_{вых}(t)\right]dt. \tag{4}$$

Для преобразования уравнения (4) разделим обе его части на V и подставим вместо величин $I_{вх}(t)$ и $I_{вых}(t)$ их значения:

$$\frac{\Delta M}{V} = \frac{F_{Cl}}{V}\int_0^t \left[C_{вх}(t) - C_{вых}(t)\right]. \tag{5}$$

Левая часть равенства (5) — это изменение количества дезинфектанта, отнесенное к единице объема, т. е. изменение концентрации ΔC, которое можно записать так:

$$\frac{\Delta M}{V} = \Delta C = C(t) - C(0), \tag{6}$$

где $C(t)$ — концентрация в любой момент времени (переменная величина); $C(0) = const$ — значение концентрации дезинфектанта в начальный момент времени.

Тогда

$$C(t) - C(0) = \frac{F_{Cl}}{V}\int_0^t \left[C_{вх}(t) - C_{вых}(t)\right]dt. \tag{7}$$

В результате дифференцирования уравнения (7) получаем изменение концентрации дезинфектанта во времени в рассматриваемом потоке:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{F_{Cl}}{V}\left(C_{вх} - C\right). \tag{8}$$

Отношение $\dfrac{V}{F_{Cl}}$ характеризует среднее время нахождения частиц дезинфектанта в зоне перемешивания дезинфектанта с водой; примем его обозначение в виде τ . Время пребывания τ является параметром модели поддержания качества воды, который обычно определяется экспериментально либо расчетом.

Дифференциальное уравнение модели поддержания качества воды запишем с учетом параметра τ :

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(C_{вх} - C\right). \tag{9}$$

Вид модели идеального перемешивания — уравнение (8) или (9) показывает, что это модель с сосредоточенными параметрами, так как основная переменная изменяется только во времени.

Уравнение (8), описывающее изменение концентрации дезинфектанта, можем также представить в виде:

$$V\frac{dC}{dt} = F_{Cl}\left(C_{вх} - C\right). \tag{10}$$

Для решения уравнения (9) воспользуемся методом преобразования временной функции $C(t)$ по Лапласу, принимая во внимание, что $C(t) = C_{вых}(t)$ и пользуясь соответствующими правилами, запишем операторное уравнение, которое соответствует решаемому:

$$pC_{вых}(p) = \frac{1}{\tau}\left[C_{вх}(p) - C_{вых}(p)\right]. \tag{11}$$

Или

$$W(p) = \frac{C_{вых}(p)}{C_{вх}(p)} = \frac{1}{\tau p + 1}. \tag{12}$$

Выражение (12) является операторным уравнением модели процесса дезинфекции воды. Поскольку величина τ имеет смысл постоянной времени объекта, то уравнение (12) можно переписать в следующем виде:

$$W(p)=\frac{1}{Tp+1}. \tag{13}$$

Уравнение (13) — это передаточная функция, характеризующая модель процесса дезинфекции воды. Как видно модели процесса дезинфекции воды в ваннах бассейнов соответствует инерционное звено первого порядка. Чтобы получить решение исходного дифференциального уравнения в области действительной переменной t, необходимо произвести обратное преобразование по Лапласу. При этом решение в общем виде записывается так:

$$C_{вых}(t)=L^{-1}\left[W(p)C_{вх}(p)\right]. \tag{14}$$

Для удобства составления структурной схемы уравнение (9) перепишем в таком виде:

$$\dot{C}_{вых}=-\frac{1}{\tau}C_{вых}+\frac{1}{\tau}C_{вх}. \tag{15}$$

Процесс теплообмена воды в ваннах бассейнов представляет собой изменение температуры смешанного потока горячей и холодной воды на входе в ванну бассейна. В нашем случае примем перемешивание идеальным. Тогда объект описывается дифференциальным уравнением первого порядка с постоянной времени, равной времени пребывания в резервуаре.

Так как $Tгор > Tсм > Tхол$, при этом теплопроводность жидкостей одинакова, то запишем:

$$Tсм=Tхол+\frac{Fгор}{Fхол+Fгор}\cdot(Tгор-Tхол). \tag{16}$$

Дальше будем обозначать:

$Tхол=T_1, Tгор=T_2, Tсм=T, Fхол=F_1, Fгор=F_2$.

В рассматриваемом объекте смешиваются два потока воды – горячая и холодная вода с расходами F_1, F_2, температурами T_1, T_2 и удельными теплоемкостями c_{p1}, c_{p2}.

Задача управления состоит в поддержании заданного значения T температуры смешанной воды путем изменения расхода F_1 при условии, что основными возмущающими источниками являются расход и температура горячей воды F_2, T_2, а температура холодной воды и теплоемкости горячей и холодной воды T_1, c_{p1}, c_{p2} постоянны.

Запишем уравнение теплового баланса:

$$F_1T_1c_{p1}+F_2T_2c_{p2}=(F_1+F_2)Tc_p, \tag{17}$$

$$c_p=\frac{(F_1c_{p1}+F_2c_{p2})}{F_1+F_2}. \tag{18}$$

Отсюда

$$T=\frac{F_1T_1c_{p1}}{F_1c_{p1}+F_2c_{p2}}+\frac{F_2T_2c_{p2}}{F_1c_{p1}+F_2c_{p2}}. \tag{19}$$

Как видно из выражения (19), характерной особенностью является нелинейность статических характеристик по температурным каналам T_1-T, T_2-T. При условии малых отклонений координат объекта от их заданных значений можно провести линеаризацию зависимости (19) и найти приближенно коэффициенты усиления объекта по каждому каналу.

Обозначим заданные значения входных и выходных параметров через F_1^0, F_2^0, T_2^0 и разложим (19) в ряд Тейлора в малой окрестности F_1^0, F_2^0, T_2^0:

$$T = T^0 + (\frac{\partial T}{\partial F_1})^0 (F_1 - F_1^0) + (\frac{\partial T}{\partial F_2})^0 (F_2 - F_2^0) + (\frac{\partial T}{\partial T_2})^0 (T_2 - T_2^0), \tag{20}$$

где:

$$(\frac{\partial T}{\partial F_1})^0 = \frac{F_2^0 c_{p1} c_{p2} (T_1^0 - T_2^0)}{(F_1^0 c_{p1} + F_2^0 c_{p2})^2},$$

$$(\frac{\partial T}{\partial F_2})^0 = \frac{F_1^0 c_{p1} c_{p2} (T_2^0 - T_1^0)}{(F_1^0 c_{p1} + F_2^0 c_{p2})^2},$$

$$(\frac{\partial T}{\partial T_2})^0 = \frac{F_2^0 c_{p2}}{F_1^0 c_{p1} + F_2^0 c_{p2}}.$$

Переходя к отклонениям $y_1 = T - T^0, x_1 = F_1 - F_1^0, x_2 = F_2 - F_2^0, x_3 = T_2 - T_2^0$, получим уравнение статической характеристики в виде:

$$y_1 = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3, \tag{21}$$

где $k_1 = (\frac{\partial T}{\partial F_1})^0$, $k_2 = (\frac{\partial T}{\partial F_2})^0$, $k_3 = (\frac{\partial T}{\partial T_2})^0$.

Аналогично проведем линеаризацию и для процесса дезинфекции воды в бассейне:

$$C = C^0 + (\frac{\partial C}{\partial F_1})^0 (F_1 - F_1^0) + (\frac{\partial C}{\partial F_2})^0 (F_2 - F_2^0) + (\frac{\partial C}{\partial T_2})^0 (F_{Cl} - F_{Cl}^0), \tag{22}$$

$$y_2 = k_1 z_1 + k_2 z_2 + k_3 z_3, \tag{23}$$

где $y_2 = T - T^0, z_1 = F_1 - F_1^0, z_2 = F_2 - F_2^0, z_3 = F_{Cl} - F_{Cl}^0$, $k_1 = (\frac{\partial C}{\partial F_1})^0$, $k_2 = (\frac{\partial C}{\partial F_2})^0$, $k_3 = (\frac{\partial C}{\partial F_{Cl}})^0$.

Соответственно:

$$(\frac{\partial C}{\partial F_1})^0 = \frac{-F_{Cl}^0 C_{Cl}}{(F_{Cl}^0 + F_1^0 + F_2^0)^2},$$

$$(\frac{\partial C}{\partial F_2})^0 = \frac{-F_{Cl}^0 C_{Cl}}{(F_{Cl}^0 + F_1^0 + F_2^0)^2},$$

$$(\frac{\partial C}{\partial F_{Cl}})^0 = \frac{C_{Cl} (F_1^0 + F_2^0)}{(F_{Cl}^0 + F_1^0 + F_2^0)^2}.$$

Рассмотрим динамику процессов теплообмена в ваннах бассейнов. Температуру на выходе можно записать в виде:

$$V c_T \frac{dT}{dt} = F c_T (T_{вх} - T), \tag{24}$$

где c_T — теплоемкость вещества потока теплоносителя; T — температура в любой точке зоны идеального перемешивания ($T = T_{вых}$); $T_{вх}$ — температура на входе в зону идеального перемешивания.

Уравнение (24) характеризует распределение температуры в потоке с гидродинамической структурой идеального перемешивания.

Уравнение (24) можем также представить в виде:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{F}{V}\left(T_{вх} - T\right),$$
$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\alpha}\left(T_{вх} - T\right), \qquad (25)$$

где $\alpha = \frac{V}{F}$ - время пребывания частиц в системе. Время пребывания α является параметром модели поддержания температуры воды, который обычно определяется экспериментально либо расчетом.

Для решения уравнения (25) воспользуемся методом преобразования временной функции $T(t)$ по Лапласу, принимая во внимание, что $T(t) = T_{вых}(t)$ и пользуясь соответствующими правилами, запишем операторное уравнение, которое соответствует решаемому:

$$pT_{вых}(p) = \frac{1}{\alpha}\left[T_{вх}(p) - T_{вых}(p)\right]. \qquad (26)$$

Или

$$W(p) = \frac{T_{вых}(p)}{T_{вх}(p)} = \frac{1}{\alpha p + 1}. \qquad (27)$$

Выражение (27) является операторным уравнением модели поддержания температуры воды. Поскольку величина α — имеет смысл постоянной времени объекта, то уравнение (27) можно переписать в следующем виде:

$$W(p) = \frac{1}{Tp + 1}. \qquad (28)$$

Уравнение (28) — это передаточная функция, характеризующая модель теплообмена воды. Как видно модели теплообмена воды в ваннах бассейнов соответствует инерционное звено первого порядка. Чтобы получить решение исходного дифференциального уравнения в области действительной переменной t, необходимо произвести обратное преобразование по Лапласу. При этом решение в общем виде записывается так:

$$T_{вых}(t) = L^{-1}\left[W(p)T_{вх}(p)\right]. \qquad (29)$$

Для удобства составления структурной схемы уравнение (25) перепишем в таком виде:

$$\dot{T}_{вых} = -\frac{1}{\alpha}T_{вых} + \frac{1}{\alpha}T_{вх}. \qquad (30)$$

Промоделируем процессы теплообмена и дезинфекции воды в ваннах бассейнов. На рисунке 2 показана схема модели в терминах пакета Simulink.

На рисунке 3 приведены результаты моделирования – графики переходных процессов при изменении входных параметров и изменении возмущающих параметров.

На рисунке 4 показана схема линеаризованной модели в терминах пакета Simulink.

На рисунке 5 приведены результаты моделирования – графики переходных процессов при изменении входных параметров для .линеаризованной модели.

При анализе объекта выяснилось, что в течение суток происходит значительное колебание входных параметров, что обусловлено отключением подачи воды и дезинфектанта в ночной период. Вследствие этого ошибка в результате линеаризации может оказаться существенной. Так, например, при увеличении расхода F_2 на 30% по сравнению с заданным коэффициент усиления k_2 может измениться на 5 – 20%, а k_1 - на 25 – 40% от расчетных, в зависимости от расходов F_1, F_2. Уменьшить влияние этой нелинейности возможно различными способами. Например, введением стабилизацию отношения $F_1/F_2 = b$, что обеспечит постоянство температуры смешанной воды.

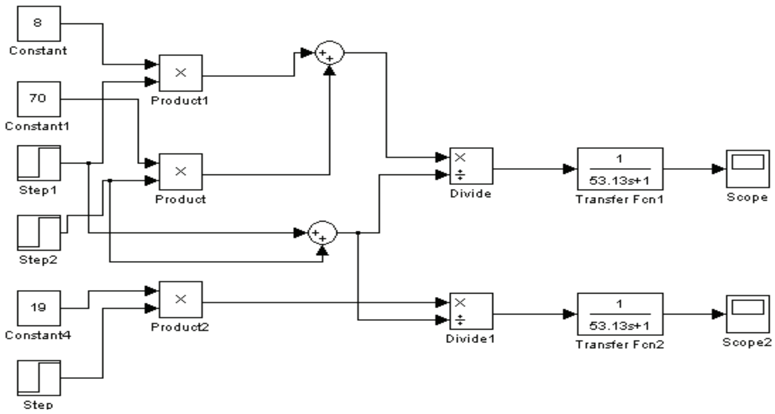
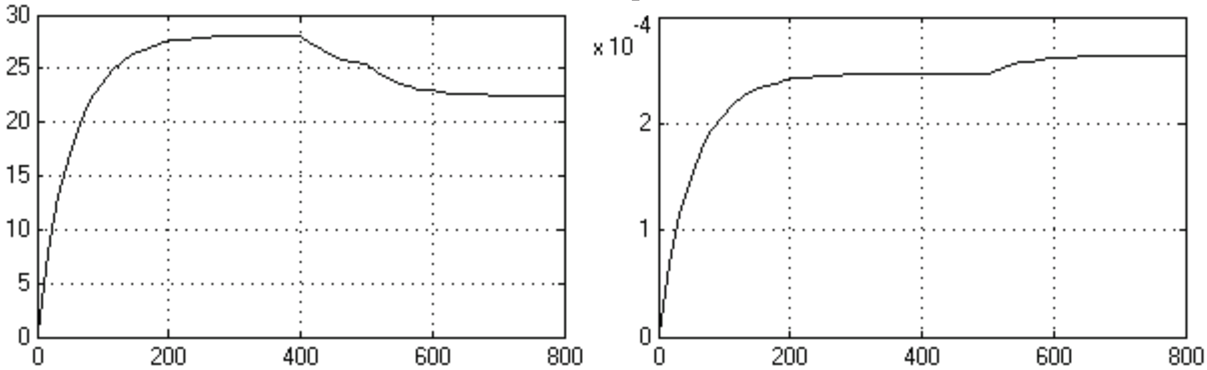


Рисунок 2 — Схема моделирования процессов теплообмена и дезинфекции воды в ваннах бассейнов в терминах пакета Simulink



а) б)

Рисунок 3 — Графики переходных процессов моделирования нелинейной системы (а – температура, б – концентрация)

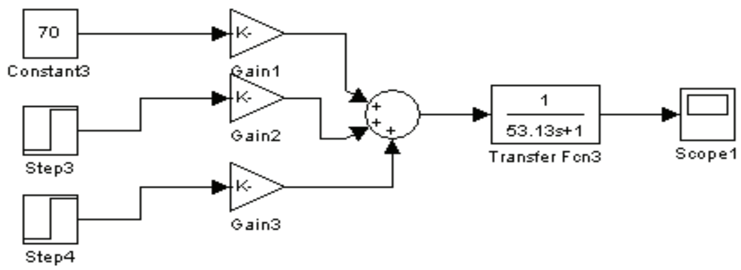
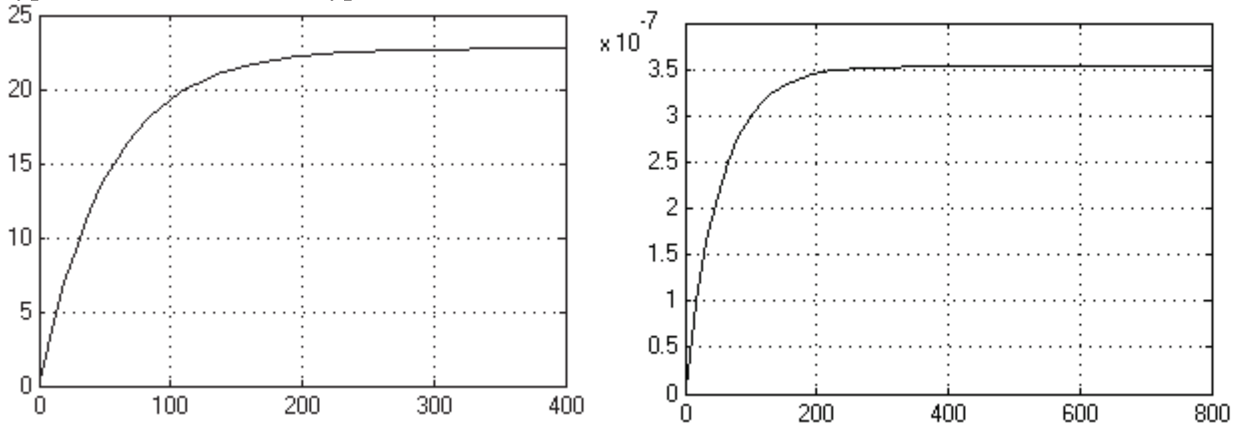


Рисунок 4 — Схема моделирования линеаризованной системы поддержания температуры воды на заданном уровне



а) б)

Рисунок 5 — График переходных процессов моделирования линеаризованной системы (а – температура, б – концентрация)

Выводы.

1. Получено описание процессов теплообмена и изменения концентрации дезинфектанта воды в ваннах бассейнов, проведено ранжирование входных и выходных переменных.

2. Разработано математическое описание процессов теплообмена и изменения концентрации дезинфектанта воды в ваннах бассейнов аналитическим методом на основе уравнений статических массо- и теплообменов.

3. Получена динамическая модель процессов теплообмена и изменения концентрации дезинфектанта воды в ваннах бассейнов, проведено моделирование динамики рассматриваемых процессов.

4. Показана возможность линеаризации нелинейной математической модели рассматриваемых процессов, проведен анализ полученных в результате моделирования характеристик.

Литература

1. Кафаров В.В. Математическое моделирование основных процессов химических производств / В.В. Кафаров, М.Б. Глебов. – М.: Высшая школа, 1991. – 400 с.

2. Липатов Л.Н. Типовые процессы химической технологии как объекты управления / Л.Н. Липатов. – М.: Химия, 1983. – 320 с.

3. Шински Ф. Системы автоматического регулирования химико-технологических процессов / Ф. Шински; пер. с англ. под ред. И.И. Гельперина. – М.: Химия, 1974. – 336 с.

4. Шувалов В.В. Автоматизация производственных процессов в химической промышленности / В.В. Шувалов, Г.А. Огаджанов, В.А. Голубятников. – М.: Химия, 1991. – 480 с.

Надійшла до редакції: 31.01.2011

Рекомендовано до друку: д-р техн. наук, проф. Зорі А.А.

Abstract

Chervinskiy V.V., Pazukha S.V. Mathematical model of heat exchange processes and water disinfection in pools' tanks. *The description of heat exchange processes and water disinfectant concentration change in pools' tanks is obtained, the ranking of input and output variables is carried out. The mathematical description of concerned processes is developed using analytical method based on static heat exchange and mass exchange equations. The dynamic model is obtained, the modeling is conducted. The possibility of non-linear mathematical model linearization is shown, the analysis of resulted modeling characteristics is conducted.*

Keywords: *Swimming pool, the ranging scheme, mathematical model, expense, concentration, disinfection, transfer function.*

Анотація

Червинський В.В., Пазуха С.В.. Математична модель процесів теплообміну та дезінфекції води в ваннах басейнів. *Отримано опис процесів теплообміну та зміни концентрації дезінфектанту води в ваннах басейнів, проведено ранжирування вхідних та вихідних змінних. Розроблено математичний опис процесів, що розглядаються, аналітичним методом на основі рівнянь статичних масо- та теплообмінів. Отримана динамічна модель, проведено моделювання. Показано можливість лінеаризації нелінійної математичної моделі, проведено аналіз отриманих у результаті моделювання характеристик.*

Ключові слова: *плавальний басейн, схема ранжирування, математична модель, витрата, концентрація, дезінфекція, передаточна функція.*