МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДОНЕЦЬКІЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання курсової роботи з курсу

«ТЕОРІЯ ТЕЛЕТРАФІКУ»

для студентів спеціальності 6.092401
«Телекомунікаційні мережі та системи»

Розглянуто на засіданні кафедри АТ
протокол № 7 від 11.06.2009 р.
Затверджено на засіданні навчально-
видавничої ради ДонНТУ
протокол № 3 від 26.06.2009 р.

- 2009 -

Методичні вказівки до виконання курсової роботи з курсу „Теорія телетрафіку” (для студентів спеціальності 6.092401 “Телекомунікаційні системи та мережі”) / Укл.: В.Я. Воропаєва, В.І. Бессараб, В.М. Лозинська - Донецьк: ДонНТУ, 2009. – 35 с.

Наведено методичні вказівки до виконання курсової роботи з курсу „Теорія телетрафіку” (для студентів спеціальності 6.092401 “Телекомунікаційні системи та мережі”).

Особливу увагу приділено моделюванню найпростішого потоку викликів та структурному синтезу систем масового обслуговування за заданими критеріями якості.

Укладачі: Воропаєва В. Я., Бессараб В.І., Лозинська В.М.

Рецензент: Босікова І.І.

Відповідальний за випуск: Воропаєва В. Я.

ВСТУП

Предметом вивчення теорії телетрафіку є процеси у вузлах телекомунікаційних мереж (телефонні станції, комутатори та маршрутизатори локальних і глобальних обчислювальних мереж та т.і.), що виникають при надходженні й обслуговуванні потоків повідомлень, та їх кількісні характеристики.

Основи нової теорії було закладено в працях датського математика, співпрацівника Копенгагської телефонної компанії А.К. Ерланга (принцип статистичної рівноваги) і отримали подальшого розвитку в роботах багатьох вітчизняних та зарубіжних вчених.

Згадані вузли мережі розглядаються як системи масового обслуговування (СМО). Математична модель системи масового обслуговування містить чотири основних елементи: потік повідомлень, що надходять, систему обслуговування, характеристики якості та дисципліну обслуговування.

Поняття потоку повідомлень включає інформацію про модель потоку викликів (вимог на з'єднання), закон розподілу тривалості обслуговування (передачі) повідомлення, множину адрес джерел і приймачів повідомлень, а також про тип каналу, який займається для передачі повідомлень, та спосіб передачі – аналоговий чи дискретний. Система обслуговування характеризується структурою побудови та набором структурних параметрів. Під дисципліною обслуговування повідомлень, що надходять, розуміють: спосіб обслуговування (з наявними втратами, очікуванням, повтором чи комбінований), порядок обслуговування (в порядку черги, в випадковому порядку чи з пріоритетом), а також іншу інформацію, яка характеризує взаємодію потоку повідомлень з системою обслуговування. До характеристик якості обслуговування відносять вірогідність явної або умовної втрати повідомлення, середній час затримки повідомлення, середня довжина черги, вірогідність втрати виклику, інтенсивність навантаження та т.і. При дослідженні СМО можуть вирішуватися:

задачі аналізу СМО – визначення характеристик якості обслуговування залежно від параметрів і властивостей вхідного потоку повідомлень, параметрів і структури системи обслуговування та дисципліни обслуговування;

задачі параметричного синтезу – визначення параметрів системи обслуговування коли її структуру задано залежно від параметрів і властивостей потоку повідомлень, дисципліни та якості обслуговування;

задачі синтезу структури системи з оптимізацією її параметрів таким чином, щоб при заданих потоках, дисципліні та якості обслуговування, вартість СМО була мінімальною, або були б мінімальними втрати викликів при заданих потоках, дисципліні та вартості системи.

Математичний апарат теорії телетрафіку базується на теорії імовірності, комбінаториці та математичній статистиці. Методи останньої застосовуються здебільшого для обробки даних, які отримуються при вимірюванні параметрів потоків повідомлень та показників якості обслуговування в реальних системах, а також при моделюванні таких систем на ЕОМ. Для рішення конкретних задач використовуються також інші розділи математики – лінійна алгебра, диференціальне та інтегральне обчислення, теорія графів, системний аналіз.

Основним інструментом дослідження в теорії телетрафіку є метод рівнянь вірогідностей станів, оснований на принципі статистичної рівноваги. Для системи обслуговування вводиться поняття стану. В найпростішому випадку стан системи характеризується однією випадковою змінною, наприклад числом зайнятих ліній або викликів, що знаходяться в системі.

При надходженні наступного виклику, закінченні обслуговування повідомлення чи зміні фази роботи керуючого пристрою система змінює свій стан. Інтенсивності переходу з одного стану в інший звичайно відомі на основі властивостей потоків викликів і звільнень. Це дозволяє побудувати розмічений граф станів і скласти систему рівнянь, які зв’язують між собою вірогідності сусідніх станів. Систему можна вирішувати аналітично або чисельно.

Прикладом аналітичного рішення є розподіли Ерланга, Енгсета, Бернулі, Пуасона.

При відсутності аналітичного рішення в ряді випадків вдається побудувати обчислювальний алгоритм на основі рекурентних співвідношень, що одержуються безпосередньо з системи рівнянь. Іншим підходом в цьому випадку є метод статистичного (імітаційного) моделювання. Математична модель процесу обслуговування при цьому реалізується в вигляді програми для ЕОМ, базуючись на імітації процесів надходження та обслуговування викликів за допомогою метода Монте-Карло.

Моделювання дозволяє отримати чисельні характеристики якості обслуговування при конкретних параметрах потоку, відомій структурі та параметрах СМО та заданій дисципліні обслуговування. Результати моделювання використовують для перевірки гіпотез і припущень, уточнення емпіричних коефіцієнтів. При моделюванні, як правило, отримують приблизну оцінку характеристик якості обслуговування, однак за рахунок збільшення часу, а також застосування спеціальних методів моделювання може досягатися потрібна точність.

1 ВИПАДКОВІ ПОТОКИ ВИКЛИКІВ

1.1 Властивості випадкових потоків

Випадкові потоки викликів класифікуються в залежності від наявності або відсутності трьох таких властивостей: стаціонарності, післядії й ординарності.

Стаціонарність означає, що з часом імовірнісні характеристики потоку не змінюються. Стаціонарність потоку рівнозначна постійній щільності імовірності надходження викликів у будь-який момент часу, інакше кажучи, для стаціонарного потоку імовірність надходження i викликів за проміжок часу Δt залежить тільки від розміру проміжку і не залежить від його розташування на осі часу (1.1.). Будь-який стаціонарний потік можна задати сімейством умовних імовірностей $F_i(t)$ надходження i (i=0, 1, 2, 3, ...) викликів у проміжку t, якщо в початковий момент цього проміжку надійшов виклик.

$$P_i(t + Дt) = P_i(t_i + Дt) = P_i(Дt) \tag{1.1}$$

Реальний (наприклад на МТС або ММТС) потік викликів має явно виражений нестаціонарний характер. Інтенсивність потоку – число викликів за одиницю часу – істотно залежить від періоду доби, дня тижня і навіть пори року. Проте завжди можна виділити одно- або двогодинні проміжки часу, протягом яких потік викликів близький до стаціонарного.

Післядія означає залежність імовірнісних характеристик потоку від попередніх подій. Іншими словами, імовірність надходження i викликів у проміжок $[t_1, t_2]$ залежить від числа, часу надходження та тривалості обслуговування викликів до моменту t_1. Для випадкового потоку без післядії умовна імовірність надходження викликів у проміжку $[t_1, t_2]$, обчислена при будь-яких припущеннях про процес обслуговування викликів до моменту t_1, дорівнює безумовній (1.2.).

$$P_i([t_1,t_2])\big|_{t<t_1} = P_i([t_1,t_2]) \tag{1.2}$$

Тому подібний потік можна виразити сімейством безумовних імовірностей $P_\mathrm{i}(t_1,t_2)$ надходження i викликів у проміжку $[t_1,t_2]$. Стаціонарний потік без післядії відповідно можна задати сімейством імовірностей $P_i(t)$ надходження i викликів у будь-якому проміжку довжиною t.

Потік викликів, що надходять від достатньо великої групи джерел, близький по своїм властивостям до потоку без післядії, якщо при цьому не враховувати повторних викликів. Потік від малої групи, навпаки, має помітну післядію, оскільки число вільних джерел залежить від попередніх подій, чим і визначається післядія потоку.

Потік повторних викликів також являється прикладом потоку з післядією, оскільки повторний виклик виникає як результат втрати попереднього виклику, тобто залежить від попередніх подій.

Ординарність означає практичну неможливість групового надходження викликів. Інакше кажучи, імовірність надходження двох або більше викликів за будь-який нескінченно малий проміжок часу Δt є величиною нескінченно малою більш високого порядку, ніж, Δt тобто

$$P_{i\geq 2}(\Delta t) = 0(\Delta t) \tag{1.3.}$$

1.2 Характеристики випадкових потоків

До основних характеристик випадкового потоку відносять провідну функцію, параметр та інтенсивність. Провідна функція випадкового потоку $\overline{x}(0,t)$ є математичне очікування числа викликів у проміжку часу $[0, t)$.

Параметр потоку $\lambda(t)$ в момент часу t є цільність імовірності викликаючого моменту:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{i\geq 1}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} \tag{1.4.}$$

Таким чином, імовірність надходження хоча б одного виклику в проміжку часу $[t, t+\Delta t]$ з точністю до нескінченно малої пропорційна проміжку часу та параметру потоку $\lambda(t)$:

$$P_{i\geq 1}(t, t+\Delta t) = \lambda(t)\Delta t + 0(\Delta t) \qquad (1.5.)$$

Для стаціонарних потоків імовірність надходження викликів не залежить від часу, тобто, $P_{i\geq 1}(t, t+\Delta t) = P_{i\geq 1}(\Delta t)$, тому параметр стаціонарного потоку постійний. Відповідно одержуємо:

$$P_{i\geq 1}(\Delta t) = \lambda\Delta t + 0(\Delta t) \qquad (1.6.)$$

Інтенсивність стаціонарного потоку μ є математичне очікування числа викликів за одиницю часу. Для нестаціонарних потоків використовується поняття середньої та миттєвої інтенсивності. Середня інтенсивність потоку в проміжку часу $[t_1, t_2]$ є математичне чекання числа викликів у цьому проміжку часу за одиницю часу. Середню інтенсивність потоку можна виразити через провідну функцію:

$$\mu(t_1, t_2) = [\bar{x}(0, t_2) - \bar{x}(0, t_1)]/(t_2 - t_1). \qquad (1.7.)$$

Миттєва інтенсивність потоку $\mu(t)$ в момент часу t є похідною провідної функції потоку по t:

$$\mu(t) = \bar{x}'(0, t) = \lim_{\Delta t \to 0}[\bar{x}(0, t+\Delta t) - \bar{x}(0, t)]/\Delta t \qquad (1.8.)$$

Якщо миттєва інтенсивність характеризує потік викликів, то параметр - потік викличних моментів. Тому завжди $\mu(t) \geq \lambda(t)$, а рівність має місце тільки для ординарних потоків, коли в кожний викличний момент надходить тільки один виклик.

При розгляді конкретних математичних моделей потоків зручно, використовуючи ознаку післядії, розподілити всі досліджувані моделі по трьох класах: потоки без післядії, із простою та обмеженою післядією. У клас потоків без післядії входять: найпростіший, пуасонівський із змінним або випадковим параметром, неординарний пуасонівський та пуасонівський із неординарними викликами. До потоків із простою післядією відносять: примітивний, згладжений, з повторними викликами та потік звільнень. Обмежену післядію мають рекурентний потік, потік Пальма, потік Ерланга

1.3 Найпростіший потік викликів

Стаціонарний ординарний потік без післядії називається найпростішим. Задається найпростіший потік сімейством імовірностей $P_i(t)$ надходження $i\left(i=\overline{0,\infty}\right)$ викликів у проміжку часу *t*. Для визначення функції $P_i(t)$ проведемо дослідження процесу надходження i викликів протягом двох сусідніх довільно розташованих на осі часу проміжків t та Δt

$$\begin{aligned} P_i(t+\Delta t) &= P(i,t;0,\Delta t)+P(i-1,t;1,\Delta t)+P(i-2,t;2,\Delta t)+\ldots+ \\ &+P(1,t;i-1,\Delta t)+P(0,t;i,\Delta t)=\sum_{j=0}^{i}P(i-j,t;j,\Delta t), \end{aligned} \tag{1.9}$$

де $P(i-j,t;j,Дt)$ – імовірність такої спільної події: коли у проміжок часу t надходить i-j викликів, а в проміжок часу Δt надходить j викликів.

Ця імовірність дорівнює як добутку двох безумовних імовірностей $P_{i-j}(t)$ і $P_j(\Delta t)$, оскільки через відсутність післядії імовірність надходження викликів у проміжку часу Δt не залежить від числа викликів , що надійшли , у проміжку часу t

$$P_i(t+\Delta t)=\sum_{j=0}^{i}P_{i-j}(t)P_j(\Delta t). \tag{1.10}$$

Рівняння (1.10) можна значно спростити, якщо врахувати (1.3)

$$P_i(t+\Delta t)=P_i(t)P_0(\Delta t)+P_{i-1}(t)P_1(\Delta t)+0(\Delta t). \tag{1.11}$$

Імовірність $P_1(\Delta t)$ визначаємо з виразу (1.6) з урахуванням ординарності потоку:

$$P_1(\Delta t) = \lambda Дt + 0(\Delta t), \qquad (1.12)$$

а імовірність:

$$P_0(Дt) = 1 - P_1(\Delta t) - P_{i\geq 2}(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + 0(\Delta t). \qquad (1.13)$$

Підставимо вираз (1.12) і (1.13) у систему рівнянь (1.14), потім перенесемо в ліву частину рівнянь $P_i(t)$ та поділимо обидві частини рівнянь на Δt.

Переходячи до границі при $\Delta t \to 0$, одержуємо систему диференційних рівнянь:

$$P_i'(t) = -\lambda P_i(t) + \lambda P_{i-1}(t). \qquad (1.14)$$

Початковими умовами для системи (1.14) є

$$P_0(0) = 1; P_i(0) = 0, i = \overline{1,\infty}. \qquad (1.15)$$

Розв’язанням (1.14) з урахуванням умов (1.15) є формула Пуасона:

$$P_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}. \qquad (1.16)$$

1.4 Властивості і характеристики найпростішого потоку

Вираз (1.16) є одним із можливих способів завдання найпростішого потоку. Іншим способом може бути розподіл проміжку z між сусідніми викликами. $P(z < t)$ визначимо через імовірність протилежної події:

$$P(z < t) = 1 - P(z > t). \qquad (1.17)$$

Імовірність $P(z > t)$ рівнозначна імовірності того, що за проміжок часу довжиною t не надійде жодного виклику:

$$P(z > t) = P_0(t);$$

тоді

$$P(z < t) = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (1.18)$$

Диференціюючи (1.18) по t, знаходимо щільність розподілу

$$p(t) = e^{-\lambda t} \quad (1.19)$$

Закон розподілу з щільністю (1.19) називається експонентним, або показовим, а λ – його параметром. Визначимо математичне очікування, дисперсію та середньоквадратичне відхилення проміжку z:

$$M_z = \int_0^\infty tp(t)dt = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}dt = 1/\lambda; \quad (1.20)$$

$$D_z = \int_0^\infty t^2 p(t)dt - M_z^2 = \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t}dt - 1/\lambda = 1/\lambda; \quad (1.21)$$

$$\sigma_z = \sqrt{D_z} = 1/\lambda. \quad (1.22)$$

Отриманий збіг величин M_z і σ_z характерний для показового розподілу. Цю властивість на практиці використовують як критерій для початкової перевірки відповідності гіпотези про експоненціальний розподіл отриманих статистичних даних.

1.5 Примітивний потік

Ординарний потік, параметр якого λ_i пропорційний числу вільних джерел N_i у стані обслуговуючої системи i, називається примітивним:

$$\lambda_i = \alpha(N - i). \quad (1.23)$$

де α – параметр (інтенсивність) джерела у вільному стані; N – загальне число джерел; i – число зайнятих джерел.

Примітивний потік описує надходження викликів у замкнутій системі Модель примітивного потоку враховує так званий ефект кінцевого числа джерел – нові виклики можуть надходити тільки від вільних джерел. Це визначає стрибкоподібну зміну параметра потоку, причому найбільше значення параметр приймає тоді, коли всі джерела вільні, а найменше тоді, коли число зайнятих джерел досягає максимуму. Ця властивість примітивного потоку істотно впливає на процес обслуговування і помітно підвищує пропускну спроможність обслуговуючої системи.

Математичне чекання параметра потоку:

$$\lambda = \sum \lambda_i P_i \,, \tag{1.24}$$

де P_i– імовірність того, що зайнято i джерел. Величина λ, віднесена до одного джерела

$$н = л/N \tag{1.25}$$

визначає середню інтенсивність джерела.

Розподіл проміжку незайнятості змінюється згідно показовому закону з параметром α:

$$P\left(t_{св} < t\right) = 1 - e^{-\alpha t} \,. \tag{1.26}$$

Це відповідає припущенню, що нові виклики від джерела надходять випадково, незалежно від моментів виникнення та закінчення обслуговування попередніх викликів. Примітивний потік є більш загальним поняттям у порівнянні з найпростішим. Із зростанням числа джерел N та відповідним зменшенням α післядія примітивного потоку скорочується. Якщо при обмеженому значенні i та $N \to \infty$, а $\alpha \to 0$, але так, що $N\alpha = const$, примітивний потік переходить у найпростіший із параметром $\lambda = N\alpha$. Практично вже при $N \geq 300 - 500$ (у залежності від розміру α та максимального значення i), можна користуватися більш простою моделлю найпростішого потоку.

1.6 Потік звільнень

Послідовність моментів закінчення обслуговування викликів утворює потік звільнень. Властивості потоку звільнень в загальному випадку залежать від властивостей потоку викликів, що надходять, якості роботи СМО та закону розподілу часу обслуговування.

Найбільш простим і поширеним законом розподілу випадкового часу обслуговування є показовий:

$$P(\xi < t) = 1 - e^{-t/h}, \tag{1.27}$$

де h – середній час обслуговування.

Основна властивість показового розподілу обумовлює повну незалежність моментів закінчення обслуговування від моментів початку обслуговування викликів, що надходять. Тому властивості потоку звільнень у цьому випадку не залежать від властивостей потоку викликів та від якості роботи СМО (наприклад, комутаційної системи) і цілком визначаються числом зайнятих каналів. Якщо в комутаційній системі зайнято k каналів (k джерел знаходиться на обслуговуванні), то імовірність звільнення i каналів за проміжок часу t можна розглядати як i успішних випробувань серед загального числа k незалежних випробувань і визначити відповідно до розподілу Бернуллі

$$P(i,k,t) = C_k^i p^i (1-p)^{k-i},$$

де p – імовірність звільнення одного каналу за час t.

Враховуючи на (1.27), маємо:

$$P(i,k,t) = C_k^i \left[1 - e^{-t/h}\right]^i e^{-(k-i)t/h}. \tag{1.28}$$

Імовірність того, що за час t не звільниться жодний із зайнятих каналів,

$$P(0,k,t) = e^{-tk/h}, \tag{1.29}$$

а імовірність того, що звільниться хоча б один канал

$$P(i \geq 1, k, t) = 1 - P(0, k, t) = 1 - e^{-kt/h}. \qquad (1.30)$$

Згідно визначення параметр потоку звільнень при зайнятості k каналів

$$\lambda_{зв} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(i \geq 1, k, \Delta t)}{\Delta t}. \qquad (1.31)$$

Імовірність $P(i \geq 1, k, \Delta t)$ знаходимо з (1.30) з урахуванням розкладання функції e^{-x} в ряд $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^j / j!$:

$$P(i \geq 1, k, Дt) = 1 - \sum (-1)^j \left(\frac{k\Delta t}{h} \right)^j \Big/ j! = k\Delta t / h + 0(\Delta t). \qquad (1.32)$$

Тоді

$$\lambda_{зв} = \lim_{\Delta t \to 0} [k/h + 0(\Delta t)/\Delta t] = k/h. \qquad (1.33)$$

Аналогічно, досліджуючи імовірність звільнення не менше двох ліній за малий проміжок часу Δt, одержуємо, що $P(i \geq 2, k, \Delta t) = 0(\Delta t)$. Таким чином, потік звільнень є ординарним, а параметр його прямо пропорційний числу зайнятих ліній (джерел). Отже, потік звільнень подібний примітивному потоку.

У теорії масового обслуговування для спрощення розрахункових формул величина h – середній час обслуговування, приймається за умовну одиницю часу (у.о.ч.).

2 СМО З ЯВНИМИ ВТРАТАМИ

2.1 Розподіл імовірностей станів

Розглядається така математична модель. На *V*-канальну установку надходить потік викликів із простою післядією. Час обслуговування одного виклику - випадкова величина, розподілена за експоненційним законом із середнім значенням, прийнятим за одиницю часу (h=1 у.о.ч.). Дисципліна обслуговування - з явними втратами повідомлень. Число зайнятих каналів $i\left(i=\overline{0,V}\right)$ назвемо станом досліджуваної системи. Параметр потоку викликів Λ_i виражений у викл/у.о.ч. (Ерл); його можна також трактувати як інтенсивність навантаження, що надходить, у стані системи *i,* тоді інтенсивність потоку звільнення дорівнює числу зайнятих каналів *i.* При надходженні виклику або закінченні його обслуговування система стрибкоподібно переходить з одного стану в інший. Припустимо, що в момент часу t=0 відомий стан i системи, або розподіл імовірностей станів $P_i(0)$.

Виникає задача: знайти розподіл імовірностей $P_i(t)$ в момент t.

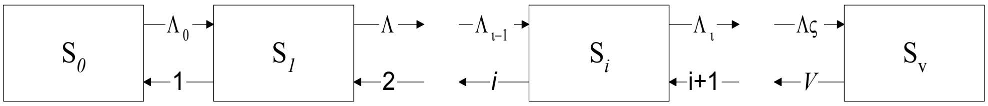

Рисунок 2.1. Граф станів СМО з явними втратами

Результат випливає з рішення диференційних рівнянь

$$P_i'(t)=\Lambda_{i-1}P_{i-1}(t)+(i+1)P_{i+1}(t)-(\Lambda_i+i)P_i(t),\quad i=\overline{0,V} \tag{2.1}$$

Імовірності $P_{-1}(t)\equiv 0$ та $P_{V+1}(t)\equiv 0$ як імовірності неіснуючих станів.

Система рівнянь (2.1) описує перехідний режим роботи досліджуваної системи обслуговування. Імовірності $P_i(t)$, що є рішенням системи рівнянь (2.1), залежать від початкових умов, тобто від розподілу $P_i(0)$. Проте для більшості практичних задач можна обмежитися дослідженням усталеного режиму, що досягається системою обслуговування при $t\to\infty$. При цьому імовірності $P_i(t)\to lim=const$ які не залежить від t та початкового розподілу $P_i(0)$. Відповідно $P_i'\to 0$. Система (2.1) перетворюється в лінійну систему однорідних рівнянь:

$$(\Lambda_i+i)P_i=\Lambda_{i-1}P_{i-1}+(i+1)P_{i+1} \tag{2.2}$$

Граничний розподіл імовірності P_i характеризує роботу системи обслуговування в стані статистичної рівноваги. В цих умовах система обслуговування як і раніше схильна до змін, проте імовірності, що описують її поведінку, не змінюються з часом. Систему (2.2) можна одержати безпосередньо, якщо скористатися таким правилом, справедливим для стану статистичної рівноваги: сума інтенсивностей виходу зі стану системи i, зважена імовірністю P_i дорівнює сумі зважених імовірностями відповідних станів інтенсивностей входу в цей стан.

Позначимо через

$$F_i = \Lambda_i P_i - (i+1)P_{i+1}, \tag{2.3}$$

тоді з (2.2) $F_i = F_{i-1} = F_{i-2} = \ldots = F_0 = 0$. Звідси одержуємо просте рекурентне співвідношення для обчислення імовірностей P_i:

$$(i+1)P_{i+1} = \Lambda_i P_i,\ \ i = \overline{0, V-1}. \tag{2.4}$$

Задаючись значеннями i, послідовно рівними 0, 1, 2, ... , одержуємо:

$$P_i = \frac{\Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_2 \ldots \Lambda_{i-1}}{i!} P_0 = \prod_{k=0}^{i-1} \Lambda_k P_0 / i! \tag{2.5}$$

Для визначення P_0 скористаємося умовою нормування $\sum_{j=0}^{V} P_j = 1$.

Тоді

$$P_0 = \left[\sum_{j=0}^{V} \prod_{k=0}^{j-1} \Lambda_k / j! \right]^{-1}, \tag{2.6}$$

і остаточно:

$$P_i = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \Lambda_k / i!}{\sum_{j=0}^{V} \prod_{k=0}^{j-1} \Lambda_k / j!}, \quad i = \overline{0, V}. \tag{2.7}$$

Формула (2.7) виражає розподіл імовірностей для усталеного режиму. Вона визначає імовірність зайнятості в довільний момент i каналів системи, яка обслуговує з явними втратами потік викликів із простою післядією. Імовірність P_i можна трактувати як частку часу, протягом якої в досліджуваній системі зайнято i виходів.

2.2 Чотири основних випадки розподілу станів системи M_r/M/V/L

1. Потік викликів примітивний із параметром $\Lambda_i = \alpha(N-i)$ дисципліна обслуговування з явними втратами (M_i/M/V/L). У цьому випадку

$$\Lambda_0\Lambda_1\Lambda_2...\Lambda_{i-1} / i! = \alpha N\alpha(N-1)\alpha(N-2)...\alpha(N+1-i)/i! = C_N^i\alpha^i. \quad (2.8)$$

Підставивши вираз (2.8) у (2.7) отримаємо розподіл Енгсета:

$$P_i = C_N^i\alpha^i \Big/ \sum_{j=0}^{V} C_N^j\alpha^j. \quad (2.9)$$

2. Потік викликів найпростіший із параметром Λ, дисципліна обслуговування з явними втратами (M/M/V/L). З (2.7) безпосередньо випливає перший розподіл Ерланга:

$$P_i = \frac{\Lambda^i / i!}{\sum_{j=0}^{V}\Lambda^j / j!}. \quad (2.10)$$

Розподіл Ерланга можна одержати також із розподілу Енгсета, при умові $N \to \infty$, а $\alpha \to 0$, але так, що $N\alpha = \Lambda = const$.

3. Потік викликів примітивний з параметром $\Lambda_i = \alpha(N-i)$, дисципліна обслуговування без втрат (M_i/M/V/LL). Для обслуговування N джерел викликів без втрат необхідно, щоб число виходів у системі $V = N$. При цьому вираз (2.9) з урахуванням бінома Ньютона $\sum_{j=0}^{N} C_N^j a^j b^{N-j} = (a+b)^N$ приймає вигляд:

$$P_i = C_N^i\alpha^i / \sum C_N^j\alpha^j = C_N^j\alpha^j / (1+\alpha)^N. \quad (2.11)$$

Позначивши $\alpha = \alpha/(1+\alpha)$, після нескладного перетворення маємо розподіл Бернуллі:

$$P_i = C_N^i \alpha^i (1-\alpha)^{N-1} \tag{2.12}$$

4. Потік викликів найпростіший з параметром Λ, дисципліна обслуговування без втрат (M/M/V/LL). В цьому випадку число виходів у системі повинно бути не обмеженим, тобто $V \to \infty$. З розподілу (2.11), з урахуванням розкладання функції e^{Λ} в ряд Маклорена $\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j / j!$ одержуємо розподіл Пуасона:

$$P_i = \frac{\Lambda^i / i!}{\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^i / j!} = \frac{\Lambda^i}{i!} e^{-\Lambda}. \tag{2.13}$$

Розподіл Пуасона (2.13) можна також одержати з розподілу Бернуллі (2.11) при $N \to \infty$ та $\alpha \to 0$, але так що $N\alpha \to \Lambda$. Таким чином, найбільш загальним із розглянутих чотирьох розподілів є розподіл Енгсета. З нього випливає, з одного боку, перший розподіл Ерланга, а з іншого боку - розподіл Бернуллі. З останніх двох, різними засобами, можна одержати розподіл Пуасона.

Необхідно відзначити, що у всіх розглянутих розподілах параметри Λ, α, a, що характеризують потік викликів, виражені у викл./у.о.ч.(Ерл).

2.3 Характеристики якості систем M/M/V/L

2.3.1 Імовірність втрат за часом

$$P_i = P_V = \frac{\Lambda^V / V!}{\sum_{j=0}^{V} \Lambda^j / j!} = E_V(\Lambda). \tag{2.14}$$

Формулу (2.14) (символічний запис $E_V(\Lambda)$) звичайно називають першою формулою Ерланга.

2.3.2 Імовірність втрати виклику

Для найпростішого потоку викликів

$$P_в = \Lambda_{втр} / \Lambda = \Lambda P_V / \Lambda = P_V = E_V(\Lambda). \qquad (2.15)$$

Таким чином, імовірність втрати виклику збігається з імовірністю втрат за часом.

2.3.3 Інтенсивність обслугованого навантаження

Відповідно до визначення, використовуючи рекурентні співвідношення (2.4), одержуємо

$$Y = \sum_{i=1}^{V} iP = \Lambda \sum_{i=1}^{V} P_{i-1} = \Lambda \sum_{i=0}^{V-1} P_i = \Lambda(1 - P_V) = \Lambda[1 - E_V(\Lambda)]. \qquad (2.16)$$

2.3.4 Інтенсивність потенційного навантаження.

За аналогією з попереднім:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} iP_i = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} P_i = \Lambda. \qquad (2.17)$$

У (2.17) імовірність P_i визначається відповідно до розподілу Пуасона (2.13). Рівність інтенсивностей потенційного навантаження та навантаження, що поступає, обумовлює рівність інтенсивностей втраченого $\Lambda_{втр}$ та надлишкового R навантажень:

$$\Lambda_{втр} = R = \Lambda E_V(\Lambda). \qquad (2.18)$$

З (2.18) безпосередньо випливає рівність втрат по навантаженню та по виклику. Таким чином, усі три види втрат рівні між собою. Пояснюється це двома властивостями найпростішого потоку: стаціонарністю та відсутністю післядії.

3 СМО З ОЧІКУВАННЯМ

3.1 Другий розподіл Ерланга

Розглянута тут модель багато в чому аналогічна першій задачі Ерланга. V-канальна СМО обслуговує найпростіший потік викликів. Час обслуговування одного виклику - випадкова величина, що має показовий розподіл величин, з параметром прийнятим за одиницю часу ($h=l$ у.о.ч.). Параметр потоку виклику Λ, можна розглядати як інтенсивність навантаження, що поступає. При зайнятості всіх V виходів виклик, що надійшов, стає в чергу й обслуговується після деякого чекання. Загальне число викликів, що знаходяться в системі на обслуговуванні та в черзі, позначимо $i\left(i=\overline{0,\infty}\right)$ та назвемо станом системи. При $i=\overline{0,V}$ величина i характеризує число зайнятих виходів у системі, при $i=\overline{V,\infty}$ число зайнятих виходів дорівнює V, а різниця $i-V$ є довжина черги. Параметр потоку звільнень визначається числом зайнятих виходів і в першому випадку, при $i=\overline{0,V}$, залежить від стану системи i, а у другому, при $i=\overline{V,\infty}$, має постійне значення V.

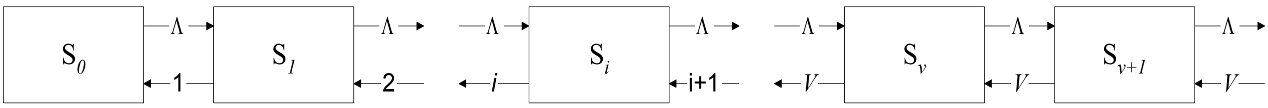

Рисунок 3.1. Граф станів СМО з чеканням

Імовірність того, що система в сталому режимі знаходиться в стані i позначимо через P_i. За аналогією з (2.2) система рівнянь для стана статистичної рівноваги має такий вид:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\Lambda+i\right)P_i=\Lambda P_{i-1}+\left(i+1\right)P_{i+1}, \quad i=0,V-1;\\&\left(\Lambda+V\right)P_i=\Lambda P_{i-1}+VP_{i+1}, \qquad i=\overline{V,\infty}.\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Позначимо $F_i = \Lambda P_{i-1} + (i+1)P_{i+1}$ для $i = \overline{0, V-1}$ і $F_i = \Lambda P_{i-1} + VP_{i+1}$ при $i = \overline{V, \infty}$. Тоді з (3.1) одержуємо $F_i = F_{i-1} = ... = F_0 = 0$, звідки випливають два співвідношення для обчислення імовірностей P_i:

$$\left.\begin{aligned} &(i+1)P_{i+1} = \Lambda P,\ i = \overline{0, V-1}; \\ &VP_{i+1} = \Lambda P, \qquad i = \overline{V, \infty}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Приймаючи значення i послідовно рівними 0, 1, 2,... , одержуємо:

$$\left.\begin{aligned} &P_i = \Lambda^i P_0 / i!, \qquad\qquad i = \overline{0, V}; \\ &P_i = (\Lambda/V)^{i-V}\, \Lambda^V P_0 / V!,\ i = V, \infty. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Для визначення імовірності P_0 скористаємося умовою нормування $\sum\limits_{j=0}^{\infty} P_j = 1$ з урахуванням (3.3)

$$P_0 = \left[\sum_{j=0}^{V-1} \left(\Lambda^i / j! \right) + \frac{\Lambda^V}{V!} \sum_{j=0}^{\infty} (\Lambda/V)^j \right]^{-1}. \tag{3.4}$$

Вираз $\sum\limits_{j=0}^{\infty} (\Lambda/V)^j$ в (3.4) є сума нескінченної геометричної прогресії. При $\Lambda \geq V$ ряд $(\Lambda/V)^j$ розходиться. Відповідно $P_0 \to 0$, і всі імовірності $P_i \to 0$ при кінцевому значенні i. Можна показати, що $\lim\limits_{i \to \infty} P_i = 1 \Rightarrow P_\infty \to 1$. Це означає, що при інтенсивності поступального навантаження Λ, яка дорівнює або перевищує число виходів системи V, з імовірністю 1 постійно будуть зайняті усі виходи, а довжина черги буде нескінченною. Тому, щоб система могла функціонувати нормально, а черга не зростала нескінченно, необхідно виконати умову $\Lambda < V$. У цьому випадку прогресія $(\Lambda < V)^j$ буде убуваюча, а сума її $\sum (\Lambda/V)^j = V/(V - \Lambda)$. Відповідно

$$P_0 = \left\{ \sum_{j=0}^{V-1} \Lambda^j \big/ j! + \Lambda^V \big/ \left[(V-\Lambda)(V-1)! \right] \right\}^{-1}. \qquad (3.5)$$

З урахуванням (3.3) і (3.5) одержуємо другий розподіл Ерланга:

$$P_i = \frac{\Lambda^i \big/ i!}{\sum_{j=0}^{V-1} \Lambda^j \big/ j! + \Lambda^V \big/ \left[(V-\Lambda)(V-1)! \right]}, \quad i = \overline{0,V}; \qquad (3.6)$$

$$P_i = \frac{(\Lambda/V)^{i-V} \Lambda^V \big/ V!}{\sum_{j=0}^{V-1} \Lambda^j \big/ j! + \Lambda^V \big/ \left[(V-\Lambda)(V-1)! \right]}, \quad i = \overline{V,\infty}.$$

3.2 Характеристики якості обслуговування

3.2.1 Імовірність чекання для виклику, що надійшов

Для найпростішого потоку викликів вона співпадає з імовірністю зайнятості усіх виходів у системі, тобто з імовірністю втрат за часом:

$$P(\gamma > 0) = P_t = \sum_{k=V}^{\infty} P_k = \frac{\Lambda^V \big/ (V-\Lambda)(V-1)!}{\sum_{j=0}^{V-1} \Lambda^j \big/ j! + \Lambda^V \big/ \left[(V-\Lambda)(V-1)! \right]} = D_V(\Lambda). \qquad (3.7)$$

Вираз (3.7) називається другою формулою Ерланга.

Слід зазначити, що завжди $D_V(\Lambda) > E_V(\Lambda)$; тобто при однаковій інтенсивності поступального навантаження імовірність чекання в системі з чеканням вище, ніж імовірність втрати виклику в системі з явними втратами Зазначене перевищення втрат пояснюється тим, що при звільненні виходу в системі з явними втратами він дається виклику , що надходить, а в системі з очікуванням при наявності черги - що очікує. Виклик, що знову надійшов , у цьому випадку, вимушений ставати в чергу. Слід зазначити, що абоненти значно спокійніше ставляться до невеличкого чекання, ніж до відмов. Тому при нормуванні якості обслуговування можна припускати більше значення імовірності $P(\gamma > 0)$ в порівнянні з величиною $P_в$ системі з явними втратами.

3.2.2 Інтенсивність обслугованого навантаження

Відповідно до визначення, використовуючи рекурентні співвідношення (3.2), одержуємо:

$$Y = \sum_{i=1}^{V} iP_i + \sum_{i=V+1}^{\infty} VP_i = \Lambda \sum_{i=1}^{V} P_{i-1} + \Lambda \sum_{i=V+1}^{\infty} P_{i-1} = \Lambda \sum_{i=1}^{\infty} P_i = \Lambda . \quad (3.8)$$

Через відсутність явних втрат повідомлень інтенсивність навантаження, що надходить, збігається з інтенсивністю обслугованого навантаження і надлишкове навантаження відсутнє. Оскільки для найпростішого потоку інтенсивність потенційного навантаження дорівнює інтенсивності навантаження, що надходить, втрачене навантаження також відсутнє. Проте не завжди в системі з очікуванням втрати по навантаженню дорівнюють нулю. При обслуговуванні примітивного потоку (така модель тут не розглядається) джерело, за рахунок очікування в середньому менше знаходиться у вільному стані, чим у системі без втрат. Це призводить до зниження інтенсивності потоку викликів і навантаження, що надходить, стає менше потенційного навантаження. І хоча усі виклики, що надходять, обслуговуються (рівність (3.8) вірна), втрати по навантаженню мають місце.

3.2.3 Імовірність перевищення довжини черги заданої величини *n*

Використовуючи послідовно $n+1$ разів друге рекурентне співвідношення (3.2), одержуємо:

$$\begin{aligned} P(S > n) &= \sum_{i=V+n+1}^{\infty} P_i = (\Lambda/V)^{n+1} \sum_{i=V+n+1}^{\infty} P_{i-n-1} = \\ &= (\Lambda/V)^{n+1} \sum_{i=V+n+1}^{\infty} P = (\Lambda/V)^{n+1} D_V(\Lambda) . \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.2.4 Середня довжина черги

З урахуванням рівності $\sum_{i=0}^{\infty} iq^i = q/(1-q)^2$ одержуємо:

$$\overline{S} = \sum_{i=V}^{\infty}(i-V)P_i = \sum_{i=0}^{\infty} iP_{i+V} = P_V \sum_{i=0}^{\infty} i(\Lambda/V)^i = \\ = P_V \Lambda / V(1-\Lambda/V)^2 = \Lambda D_V(\Lambda)/(V-\Lambda). \tag{3.10}$$

Величина $\overline{S}$ є інтенсивність навантаження, утворюваної викликами, що очікують, а $\Lambda P(j>0)$ - інтенсивність потоку затриманих викликів, де кожний затриманий виклик у середньому очікує $\overline{\gamma_з}$. Тоді:

$$\overline{S} = \Lambda P(\gamma > 0)\overline{\gamma}_з. \tag{3.11}$$

3.2.5 Середня тривалість очікування

Враховуючи (3.10) та (3.11) маємо:

$$\overline{\gamma}_з = 1/(V-\Lambda). \tag{3.12}$$

Середня тривалість очікування для будь-якого виклику, що надійшов:

$$\overline{\gamma} = \overline{\gamma}_з P(\gamma > 0) = D_V(\Lambda)/(V-\Lambda). \tag{3.13}$$

Величини $\overline{\gamma_з}$ та $\overline{\gamma}$ виражені в умовних одиницях часу.

3.2.6 Імовірність очікування більше припустимого часу *t_{пр}*

Величину $P(\gamma > t_{пр})$ часто називають умовними втратами. На відміну від попередніх характеристик, імовірність $P(\gamma > t_{пр})$ залежить від вигляду черги. Найбільш простий вираз $P(\gamma > t_{пр})$ утворюється при упорядкованій черзі. Розглянемо цей випадок. Імовірність $P(\gamma > t_{пр})$ можна уявити у вигляді такої суми:

$$P(\gamma > t_{пр}) = \sum_{i=V}^{\infty} P_i(\gamma > t_{пр})P_i, \tag{3.14}$$

де $P_i\left(\gamma > t_{np}\right)$- імовірність очікування понад t_{np} при надходженні виклику в стані системи i. Очевидно, $P_i\left(\gamma > t_{np}\right) > 0$ тільки при $i = \overline{V,\infty}$. Для того щоб виклик , що надійшов , у стані системи і (довжина черги дорівнює $i - V$) чекав початку обслуговування більше часу t_{np}, необхідно, щоб за час t_{np}, звільнилося не більш ніж $1 - V$ ліній. Параметр потоку звільнень при наявності черги - постійний і дорівнює V. У цьому випадку відповідно до (1.34) потік звільнень є найпростішим і імовірність звільнення k ліній за час t_{np} є

$$P_k\left(t_{np}\right) = \left(Vt_{np}\right)^k e^{-Vt_{np}} \Big/ k! \qquad (3.15)$$

Тоді

$$P_i\left(\gamma > t_{np}\right) = \sum_{k=0}^{i-V} P_k\left(t_{np}\right) = \sum_{k=0}^{i-V} \frac{\left(Vt_{np}\right)^k}{k!} e^{-Vt_{np}}. \qquad (3.16)$$

Підставивши (3.15) і (3.16) у (3.14), після ряду перетворень одержуємо:

$$P\left(\gamma > t_{np}\right) = D_V\left(\Lambda\right) e^{-\left(V-\Lambda\right)t_{np}}. \qquad (3.17)$$

Величина t_{np} у (3.17) виражена в умовних одиницях часу.

4 ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СМО

4.1 Моделювання найпростішого потоку

Для найпростішого потоку викликів з параметром λ (викл/хв) довжини проміжків $z_k = t_k - t_{k-1} > 0$ часу між послідовними викликами потоку розподілені за показовим законом з параметром λ

$$P\left(z < t\right) = F\left(t\right) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, t > 0, \\ 0, t < 0. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Ця обставина дозволяє сформувати процес надходження найпростішого потоку викликів на заданому проміжку часу за допомогою методу Монте-Карло, який в аналізованому випадку ґрунтується на такій теоремі:

Теорема: Якщо r_i - випадкові числа (рівномірно розподілені на (0, 1)), то можливе значення x_i безперервної випадкової величини X з заданою функцією розподілу $F(x)$, що відповідає r_i є коренем рівняння

$$F(x_i) = r_i. \quad (4.2)$$

Згідно до цієї теореми, для одержання послідовності випадкових значень z_k, розподілених за показовим законом з параметром λ, потрібно для кожного випадкового числа $r_i(0,1)$, що генерується на ПЕОМ датчиком псевдовипадкових чисел, розв'язати рівняння:

$$1 - e^{-\lambda z_i} = r_i, i = 1,2,... \quad (4.3)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно z_i,маємо:

$$z_i = -\frac{1}{\lambda} ln(1 - r_i). \quad (4.4)$$

Оскільки випадкові числа r_i належать інтервалу (0, 1), то число $1 - r_i$ також є випадковим (із тим же рівномірним розподілом) з інтервалу (0, 1). Тому для обчислення z_i можна використовувати більш просту формулу:

$$z_i = -\frac{1}{\lambda} ln\, r_i,\ \ i = 1,2,.... \quad (4.5)$$

При цьому, для проміжку часу $[T_1, T_2]$, час t_k надходження виклику найпростішого потоку при цьому визначається співвідношенням:

$$\begin{cases} t_k = T_1 + \sum\limits_{i-1}^{k} z_i,\ i = 1,2,... \\ t_k \le T_2 \end{cases}. \quad (4.6)$$

Результати статистичного моделювання оформляємо таблицею у вигляді

Таблиця 4.1

r_i	z_i	t_i
r_1 r_2 ...	z_1 z_2 ...	t_1 t_2 ...

Для перевірки відповідності сформованого потоку викликів найпростішому потокові з параметром r_1 проведемо статистичне опрацювання отриманих даних. З цією метою розіб'ємо проміжок $[T_1, T_2]$ на 24 рівних частини, тобто на інтервали довжиною

$$\tau = \frac{T_1 - T_2}{24}, \text{ хв} \tag{4.7}$$

і знайдемо значення $X(\tau)$ кількості викликів сформованого потоку, що надійшли, у кожний із цих інтервалів.

Таблиця 4.2

N інтервалу	1	2	....	24
$X(\tau)$	...	...	....	.... .

За цими даним запишемо статистичний розподіл величини.

Таблиця 4.3

$X(\tau)$	0	1	2	....
n_k	n_0	n_1	n_2	....

де n_k - частота значення *k*, тобто число тимчасових інтервалів довжиною *t,* у які надійшло k викликів сформованого потоку.

При цьому відомий обсяг вибірки

$$n = \sum_k n_k = 24 \tag{4.8}$$

Тоді вибіркове середнє $X(\tau)$ значення числа викликів, що надійшли в проміжку часу довжиною t, визначимо по формулі:

$$\overline{X}(\tau) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k} k \cdot n_k , \tag{4.9}$$

а приблизне значення $\overline{\lambda}$ параметра сформованого потоку визначимо за умовою:

$$X(\tau) = \overline{\lambda} \cdot \tau , \tag{4.10}$$

тобто по формулі

$$\overline{\lambda} = \frac{\overline{X}}{\tau}, \tag{4.11}$$

Можливе розходження заданого параметра λ та знайденого значення λ можна пояснити наступним:

а) недостатнім обсягом аналізованої вибірки, тобто обмеженим обсягом проміжку часу $[T_1 , T_2]$,

б) похибками наближення при моделюванні значень псевдовипадкових (а не випадкових) чисел r_i.

До основних характеристик потоку викликів відносять:

- імовірність надходження заданого числа викликів за проміжок часу довжиною t:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda \cdot t}, \ k=0,1,2,... ; \tag{4.12}$$

$$P_{\geq k}(t) = \sum_{i-k}^{\infty} P_i(t); \tag{4.13}$$

$$P_{\leq k}(t) = \sum_{i-0}^{k} P_i(t); \tag{4.14}$$

- імовірність $P_0(t)$ відсутності викликів потоку за проміжок часу довжиною t;

- імовірність розподілу довжини проміжку часу $z_k = t_k - t_{k-1}$ між послідовними викликами потоку (для найпростішого потоку викликів, як зазначено, це показовий розподіл;

- провідна функція потоку $m(0,t) = m(t)$, що дорівнює математичному очікуванню числа викликів за проміжок часу довжиною t

$$M[X(t)] = m(t) = \sum_k k \cdot P_k(t) = \lambda \cdot t \qquad (4.15)$$

(останнє для найпростішого потоку).

Кожну з цих характеристик визначаємо для сформованого потоку викликів (з параметром λ) та для заданого потоку (з параметром λ).

4.2 Моделювання процесу обслуговування

Алгоритм моделювання роздивимося на прикладі СМО з явними втратами.

Функція розподілу проміжку між викликами $P(z < t) = A(t)$, а функція розподілу тривалості обслуговування $P(\xi < t) = B(t)$. Програма моделювання містить два генератори випадкових величин z і ξ у відповідності з заданими функціями $A(t)$ і $B(t)$, змінні t_0 збереження моменту надходження чергового виклику та t_1, t_2,... , t_V для збереження моменту звільнення i-го ($i = \overline{1,V}$) каналу.

Для спрощення пояснень приймемо V=3 та проаналізуємо роботу алгоритму з моменту надходження п'ятого виклику. Перший генератор формує чергове випадкове число z_5, що відповідає надходженню п'ятого виклику $t_0 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5$. Припустимо що до моменту t_0 перший канал був зайнятий четвертим викликом, а другий та третій, відповідно другим і третім.

Тоді: $t_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + \xi_4$, $t_2 = z_1 + z_2 + \xi_2$, $t_3 = z_1 + z_2 + z_3 + \xi_3$. Кожне з чисел t_1, t_2,, t_3 визначає момент звільнення відповідного каналу.

При послідовному занятті каналів значення t_0 по черзі порівнюється з t_1, $t_2,...,t_V$, поки не виявиться канал із моментом звільнення $t_i < t_0 \left(i = \overline{1,V}\right)$. Припустимо, що $t_i > t_0$ та $t_2 > t_0$, а $t_3 < t_0$. Це означає, що до моменту надходження п'ятого виклику перший і другий канал залишалися зайнятими, а третій вже звільнився і може прийняти на обслуговування п'ятий виклик, що надійшов. Тоді t_3 присвоюється t_0. Потім генерується випадкове число ξ_5, що визначає тривалість обслуговування п'ятого виклику. Додаванням числа ξ_5 до t_3 завершується п'ятий цикл.

Шостий цикл починається з генерації випадкового числа z_6. Як і колись, $t_0=t_0+z_6$. Потім здійснюється почергове порівняння. Якщо тепер виявиться що, $t_i > t_0$, $t_2 > t_0$ і $t_3 > t_0$, то шостий виклик буде втрачений і на цьому цикл закінчиться.

Для підрахунку числа викликів, що надійшли N, та втрачених $N_{втр}$ викликів використовуються два лічильники. До першого додається одиниця при кожній генерації числа z, а до другого - при кожній втраті виклику. Відношення $N_{втр} / N$ надає по закінченні чергової серії статистичну оцінку втрат викликів.

5 ЗАВДАННЯ НА ВИКОНАННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ

5.1 Мета роботи

Провести аналіз систем масового обслуговування з явними втратами та з очікуванням для найпростішого потоку викликів із заданою інтенсивністю навантаження, що надходить. Дослідити характеристики якості обслуговування аналізованих СМО.

5.2 Порядок виконання роботи

1. У першому розділі роботи "Моделювання найпростішого потоку викликів" зробити опис порядку та теоретичне обґрунтування моделювання на ПЕОМ найпростішого потоку викликів із заданою інтенсивністю

$$\lambda = 10 \cdot \frac{N+1}{N+4} \text{ викл/хв.} \qquad (5.1)$$

на проміжку часу $[N+1,\ N+4]$, де N - номер по журналу.

При цьому коротко викласти результати проведеного моделювання, та й основні властивості змодельованого простішого-потоку викликів.

2. В другому розділі "Аналіз роботи СМО з явними втратами" потрібно:

а) описати роботу V-канальної СМО з явними втратами при обслуговуванні найпростішого потоку викликів. При цьому навести перший розподіл Ерланга і першу формулу Ерланга для імовірностей втрат, привести формули для інтенсивностей навантаження, що надходить, потенційного та обслугованого навантажень;

б) провести моделювання реального процесу обслуговування V-канальної СМО з явними втратами на проміжку $[N,\ N+200]$ хв. для найпростішого потоку викликів із параметром λ (5.1) при середньому часі обслуговування одного виклику згідно варіанту. Порівняти отримане значення імовірностей втрат $P_в$ із розрахованим по першій формулі Ерланга;

в) одержати для СМО з явними втратами результати моделювання залежності імовірностей втрат $P_в = E_V(\lambda)$ від V для змодельованих вхідних найпростіших потоків викликів та побудувати графік цієї залежності при

$$\Lambda_1 = 10\frac{N+1}{N+n}; \Lambda_2 = 20\frac{N+1}{N+n}; \Lambda_3 = 40\frac{N+1}{N+n} \quad \text{(Ерл)};$$

г) користуючись графіком, визначити при заданому значенні рівня якості обслуговування $P_в$= 0.01 необхідне число V каналів обслуговування;

д) обчислити пропускну спроможність СМО з явними втратами при обслуговуванні змодельованих найпростіших потоків викликів системою з отриманим числом каналів обслуговування;

е) результати проведених досліджень оформити у вигляді результуючої таблиці.

3. У третьому розділі роботи "Аналіз роботи СМО з очікуванням" потрібно:

а) описати роботу V-канальної СМО з очікуванням при обслуговуванні V каналами найпростішого потоку викликів. При цьому зазначити другий розподіл Ерланга і другу формулу Ерланга для імовірностей втрат, привести формули для інтенсивностей вхідного, потенційного та обслугованого навантажень, основних та допоміжних характеристик якості обслуговування;

б) одержати для СМО з очікуванням результати моделювання залежності імовірності очікування для виклику, що надійшов, $P = D_V(\lambda)$ від V і побудувати графік цієї залежності для $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$;

в) із графіка визначити при заданому значенні P = 0,02 рівня якості обслуговування необхідне число V каналів обслуговування СМО з очікуванням викликів;

г) обчислити пропускну спроможність СМО з очікуванням при обслуговуванні змодельованих найпростіших потоків викликів системою з отриманим числом каналів;

д) результати проведених досліджень порівняти з відповідними результатами розділу 2 і оформити у вигляді результуючої таблиці.

4. У четвертому розділі роботи "Розрахунок основних і допоміжних характеристик якості обслуговування одноканальної СМО з очікуванням потрібно:

а) описати роботу одноканальної СМО з очікуванням при обслуговуванні найпростішого потоку викликів із заданою інтенсивністю навантаження, що надходить

$$\lambda_0 = \frac{N+1}{N+4},$$

де N - номер по журналу;

б) обчислити пропускну спроможність аналізованої СМО з очікуванням при обслуговуванні заданого найпростішого потоку викликів і визначити для цієї системи основні і допоміжні характеристики якості обслуговування:

* імовірність очікування;

* середню довжину черги;

* середній час очікування для затриманих і викликів, що надходять; долю викликів, які обслуговуються без черги.

в) результати проведених досліджень оформити у вигляді таблиці.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Корнишев Ю.М., Фань Г.Л. «Теория распределения информации», - М.: Радио и связь, 1985.
2. Корнишев Ю. М., Пшеничников А. П., Харкевич А. Д. "Теория телетрафика" – М.: Радио и связь, 1996.

ЗМІСТ

Стор