Г.Ш. Рафіков, Н.В. Жукова, В.І. Бессараб,
М.М. Чернишев, Р.В. Федюн, В.В. Червинський

СУЧАСНА ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Навчальний посібник
для студентів напрямку підготовки „Системна інженерія"

СУЧАСНА ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Г.Ш. Рафіков, Н.В. Жукова, В.І. Бессараб,
М.М. Чернишев, Р.В. Федюн, В.В. Червинський

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

СУЧАСНА ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
для студентів напряму підготовки «Системна інженерія»

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Донецьк
ДВНЗ «ДонНТУ»
2013

УДК 681.5
ББК 32.965
С 91

Автори:

Г.Ш. Рафіков – канд. техн. наук, доцент, ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»;
Н.В. Жукова – канд. техн. наук, доцент, ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»;
В.І. Бессараб – канд. техн. наук, доцент, «ДВНЗ Донецький національний технічний університет»;
М.М. Чернишев – канд. техн. наук, доцент, ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»;
Р.В. Федюн – канд. техн. наук, доцент, ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»;
В.В. Червинський – канд. техн. наук, доцент, ДВНЗ «Донецький національний технічний університет».

Рецензенти:

В.М. Ткаченко, д-р техн. наук, професор, завідувач відділу теорії керуючих систем Інституту прикладної математики та механіки НАН України;
В.О. Ульшин, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри системної інженерії Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля;
Б.П. Русин, д-р техн. наук, професор, завідувач відділу методів та систем обробки, аналізу та ідентифікації зображень Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, лист №1/11-4117 від 27.03.2012.

Сучасна теорія керування динамічних систем: навчальний посібник / Г.Ш. Рафіков,
С 91 Н.В. Жукова, В.І. Бессараб та ін. – Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2013. – 292 с.

ISBN 978-966-377-143-4

У книзі викладаються основи сучасної теорії керування, що використовується для дослідження об’єктів зі складною структурою та великою розмірністю. Розглядаються основні поняття керованості та спостережності безперервних динамічних систем. Вирішується задача синтезу регуляторів стану для одновимірних, багатовимірних об’єктів керування. Розглянуто спостерігачі стану повного та зниженого порядку для детермінованих і стохастичних об’єктів. Книга містить велике число прикладів, які ілюструють використання теоретичних методів для рішення практичних задач.

Навчальний посібник призначений для студентів напряму підготовки «Системна інженерія» та може бути використаний для самостійного вивчення сучасних методів проектування автоматичних систем студентами технічних спеціальностей.

УДК 681.5
ББК 32.965

ISBN 978-966-377-143-4

ЗМІСТ

ВСТУП

Керування безперервними динамічними об'єктами ставить ряд нових задач сучасної теорії автоматичного керування. Ці задачі охоплюють як задачі аналізу, тобто дослідження поводження автоматичних систем при різних зовнішніх впливах, так і задачі їхнього синтезу і, зокрема, синтезу модального керування при повній і неповній інформації про стан об'єкта.

У світовій технічній літературі для вирішення всіх цих задач широко використовуються методи простору станів. Вони дозволили не тільки охопити більш широкий клас систем автоматичного керування, але й істотно полегшити вирішення задач аналізу та синтезу. Метод простору станів дозволяє, наприклад, судити, чи досяжна мета керування, визначити необхідний склад вимірювачів, синтезувати керування на всі входи багатовимірного об'єкта та ін.

Поява швидкодіючих цифрових обчислювальних машин викликала революцію в методах проектування систем керування та привела до виняткових наслідків: з'ясувалася неприйнятність старих методів і самого підходу до синтезу систем і був даний поштовх до розвитку нових методів. Паралельно з розвитком обчислювальної техніки йшов і розвиток теорії керування – було потрібно розробити більш діючі й ефективні способи розрахунку систем. Тому, щоб задовольнити цій вимозі була розроблена сучасна теорія керування, математичним апаратом якої є метод простору станів та метод векторно-матричного числення.

Даний навчальний посібник присвячений систематичному викладу методів простору станів, модального та оптимального керування та їх застосування в сучасній інженерній практиці. Велике число наведених прикладів, їхнє обговорення дозволяє читачу швидко опанувати цими методами. Навчальний посібник може служити спеціальним курсом для студентів, посібником для магістрів і аспірантів, що спеціалізуються з сучасної теорії автоматичного керування.

1 ОСНОВИ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНОГО ОБЧИСЛЕННЯ

1.1 Визначення поняття матриці

Матрицею називається прямокутна таблиця з m рядків та n стовпців, складена з елементів (об'єктів) деякого числового поля

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Об'єкти, з яких складена матриця, називають її елементами a_{ij} ($i = 1,2,...m$, $j = 1,2,...n$). Перший індекс i позначає номер рядка, а другий індекс j позначає номер стовпця.

Матриці позначають:

- круглими дужками, подвійними вертикальними відрізками або квадратними дужками:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1.4 & 2 \\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1.2 & 0 & -3 \\ 1 & 7 & 0 \end{Vmatrix} \text{ або } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix};$$

- великі літери *A*, *B*, *C* тощо:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix};$$

- скороченим назвами:

$$A = [a_{ij}] \text{ або } A = (a_{ij})_{m,n},$$

де $i = 1,2,...m$, $j = 1,2,...n$.

.

1.2 Типи матриць

В залежності від значень чисел m і n, виду та розміщення елементів виділяють наступні типи матриць:

- квадратна матриця – матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців, тобто m=n. У свою чергу квадратні матриці бувають звичайними і симетричними. У симетричної матриці елементи по обидві сторони головної діагоналі рівні

$$B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0.4 & 10 \end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix};$$

- прямокутна матриця – матриця, в якій $m \neq n$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -0.2 & 0 \end{bmatrix} \text{ або } D=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix};$$

- вектор-рядок – матриця, в якій $m=1$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix};$$

- вектор-стовпець – матриця, в якій $n=1$

$$A=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix};$$

- скаляр – матриця, в якій $m=n=1$

$$A=[1];$$

- діагональна матриця – квадратна матриця, в якій всі елементи, окрім a_{ij} при $i=j$ дорівнюють 0

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

- трикутна матриця (нижня та верхня) – квадратна матриця виду

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ і } B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

- одинична матриця – діагональна матриця, у якої всі ненульові елементи дорівнюють одиниці та позначається I або E

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

- нульова матриця – діагональна матриця, у якої всі ненульові елементи дорівнюють нулю та позначається O.

1.3 Операції над матрицями

Над матрицями можна виконувати алгебраїчні операції, які, по аналогії з числами, називають додаванням, відніманням та добутком. Існують також операції, які визначені лише для матриць.

1. Додавання матриць.

Сумою матриць $A=[a_{ij}]_{m,n}$ и $B=[b_{ij}]_{m,n}$ називається матриця $C=[c_{ij}]_{m,n}$, елементи якої знаходяться за формулою:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ i = 1,2,...m, \quad j = 1,2,...n. \tag{1.1}$$

Наприклад

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}.$$

Операція додавання матриць має властивості:

- $A + B = B + A$;
- $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- $A + O = O + A = A$;
- якщо $A + B = O$, тоді B – протилежна до A матриця.

Приклад 1.1.

Знайти суму матриць A та B.

Рішення. $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & 2+1 & -1+0 \\ 1+1 & 0-1 & 3+2 \\ 4+3 & -3+2 & 2+4 \end{bmatrix}.$

2. Добуток матриці на число.

Добутком матриці $A=[a_{ij}]_{m,n}$ на число k називається матриця $C=[c_{ij}]_{m,n}$, елементи якої знаходяться за формулою:

$$c_{ij} = ka_{ij} = a_{ij}k, \ i = 1,2,...m, \quad j = 1,2,...n. \tag{1.2}$$

Наприклад

$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}.$$

Операція множення матриці на число має властивості:

- $1A=A$;

- $c(pA)=(cp)A$;

- $(c + p)A=cA + pA$;

- $c(A + B)=cA + cB$.

3. Добуток матриць.

Добутком матриць $A=[a_{ij}]_{m,n}$ та $B=[b_{ij}]_{n,k}$ називається матриця $C=[c_{ij}]_{m,k}$, елемент c_{ij} який дорівнює сумі добутків i-ї строки матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, тобто

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj}\,,\ i = 1,2,...m\,,\quad j = 1,2,...n\,. \tag{1.3}$$

Наприклад

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Операція добутку матриць має такі властивості:

- $AB \neq BA$;

- $(AB)C = A(BC)$;

- $AE = EA = A$;

- $(A + B)C = AC + BC$; $C(A + B) = CA + CB$.

Якщо $AB=BA$, тоді матриці називаються комунікативними. Одинична матриця комунікативна з будь-якою матрицею, тобто $AE = EA = A$.

Приклад 1.2.

Знайти добуток матриць AB и BA.

Рішення. $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 4 + 3\cdot(-1) & 2\cdot 1 + 3\cdot(-2) \\ 1\cdot 4 + 0\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 0\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 2 + 1\cdot 1 & 4\cdot 3 + 1\cdot 0 \\ (-1)\cdot 2 + (-2)\cdot 1 & (-1)\cdot 3 + (-2)\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

4. Квадратна матриця A^2 – результат множення цієї матриці самої на себе. Аналогічно вводиться поняття n-го ступеня матриці A, тобто

$$A^n=A\cdot A\cdot\ldots\cdot A \text{ (} n \text{ раз).}$$

5. Якщо в матриці $A=[a_{ij}]_{m,n}$ змінити місцями рядки і стовпці, то отримаємо матрицю $A^T=[a_{ij}]_{n,m}$, яку називають транспонованою до матриці A.

Наприклад

$$(C)^T=\left(\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}\right)^T=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \end{bmatrix}.$$

Властивості транспонованої матриці:

- два рази транспонована матриця дорівнює початковій матриці $(A^T)^T=A$;

- транспонована матриця суми дорівнює сумі транспонованих матриць $(A+B)^T=A^T+B^T$;

- транспонована матриця добутку дорівнює добутку транспонованих матриць, взятому в зворотному порядку $(AB)^T=B^T A^T$.

Приклад. Знайти транспоновану матрицю A^T

Рішення. $A^T=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$

1.4 Визначник матриці

Для довільної квадратної матриці можна встановити числову характеристику, яка називається визначником (детермінантом) матриці. Визначником матриці називається скалярна величина, отримана в результаті підсумовування всіляких добутків з елементів матриці A.

Визначник матриці позначається:

- вертикальними відрізками $|A|$;

- буквою Δ;

- записом $\det A$.

Для матриці першого порядку $A=[a]$ детермінантом є сам єдиний елемент цієї матриці $\Delta=a$.

Для матриці другого порядку детермінант визначається як

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\ .$$

Для матриці порядку n визначник дорівнює сумі добутку елементів однієї строки або стовпця на їх алгебраїчні доповнення. Алгебричним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називається відповідний йому мінор, який узято зі знаком, що обчислюється за формулою::

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}\ . \tag{1.4}$$

Визначник n-го порядку, що записано через розкладання по елементам i строки та j стовпця:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}\ , \tag{1.5}$$

де $\quad M_{ij}$ – мінор до елементу a_{ij} .

Мінор M_{ij} – довільного елементу a_{ij} матриці n-порядку називають визначник матриці, яка отримана з вихідної викреслюванням i-ї строки та j-го стовпця. Іншими словом, якщо у визначнику викреслити i-ту строку та j-й стовпець, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}, то отримаємо визначник, який називається мінором M_{ij} елемента a_{ij}.

Наприклад, для матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

- мінор M_{23} до елементу a_{23} – $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$;

- мінор M_{32} до елементу a_{32} – $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix}$.

При обчисленні визначників високих порядків зручно розкладати детермінант по мінорах того рядка або стовпця, в якій найбільша кількість нульових елементів. Для досягнення такого результату використовують властивості детермінанту:

- величина визначника не зміниться, якщо його рядки замінити стовпчиками, причому кожен рядок замінюють стовпчиком з тим же самим номером;

- якщо у визначнику поміняти місцями лише два рядки (або два стовпчики), то визначник змінює знак на протилежний, зберігаючи абсолютне значення;

- якщо визначник має два однакових стовпчика або два однакових рядка, то він дорівнює нулю;

- якщо визначник містить два пропорційних рядки (стовпчики), то значення його дорівнює нулю. Якщо елементи деякого рядка (стовпчика) дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю;

- якщо всі елементи деякого рядка (стовпчика) помножити на одне й те ж число, то значення визначника також помножиться на це число. Звідси зрозуміло, що спільний множник всіх елементів рядка (стовпчика) можна винести за знак визначника;

- якщо кожний елемент деякого рядка (стовпчика) є сумою двох доданків, то визначник можна представити у вигляді суми двох визначників: в першому з них на місці кожної суми лишається тільки перший доданок, а в другому – тільки другий доданок (інші елементи визначника зберігаються);

- значення визначника не змінюється, якщо до елементів деякого рядка (стовпчика) додати відповідні елементи іншого паралельного рядка (стовпчика), помноживши їх попередньо на одна й те ж число.

Приклад 1.3.

Розрахувати визначник $\Delta=\begin{vmatrix}3 & -7 & 5\\ 1 & -2 & 3\\ 4 & 2 & -11\end{vmatrix}$.

Рішення. Вирішимо задачу двома способами:

1. Обчислимо визначник, розклавши його за елементами третього рядка:

$$\Delta=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=4(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-7 & 5\\ -2 & 3\end{vmatrix}+2(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}-11(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -7\\ 1 & -2\end{vmatrix}=$$
$$=4\cdot 1((-7)3-5(-2))+2(-1)(3\cdot 3-5\cdot 1)-11\cdot 1((-2)3-(-7)1)=-44-8-11=-63.$$

2. Отримаємо нулі у другому рядку (тому, що в ньому вже є 1, або вибирається той рядок (стовпець) в якому є пропорційні елементи). Для цього до елементів другого стовпця додамо елементи першого, попередньо помноживши їх в думці на 2, потім до елементів третього стовпця додамо елементи першого стовпця помножені на -3. Значення визначника при цьому, відповідно до властивісті, не змінитися.

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -7 & 5\\ 1 & -2 & 3\\ 4 & 2 & -11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -7+3\cdot 2 & 5+3(-3)\\ 1 & -2+1\cdot 2 & 3+1(-3)\\ 4 & 2+4\cdot 2 & -11+4(-3)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1 & -4\\ 1 & 0 & 0\\ 4 & 10 & -23\end{vmatrix}=$$

$$\Delta=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=1A_{21}+0A_{22}+0A_{23}=1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 10 & -23\end{vmatrix}=-63.$$

1.5 Ранг матриці

Мінори певної розмірності можуть бути обчислені для кожної (не тільки для квадратної) матриці. Матриця може мати багато мінорів, причому деякі з них можуть бути дорівнюють нулю, а інші ні.

Найвищий порядок мінору матриці A, який відмінний від нуля, називається рангом матриці і позначається $\operatorname{rank} A$.

Властивості рангу матриці:

- при транспонуванні матриці її ранг не зміниться;

- ранг системи векторів матриці A дорівнює рангу системи векторів її стовпців і дорівнює рангу цієї матриці;

- ранг матриці не зміниться при перестановці її стовпців або рядків;

- ранг матриці не зміниться, якщо видалити з неї стовпець або рядок, всі елементи якого дорівнюють нулю;

- ранг матриці не зміниться, якщо з неї видалити стовпець (рядок), який є лінійною комбінацією її решти стовпців (рядків);

- ранг матриці не зміниться при перемножуванні довільного її стовпця (рядки) на будь-яке число не рівне нулю;

- ранг матриці не зміниться, якщо до будь якого стовпця (рядку) додати довільну лінійну комбінацію інших стовпців (рядків) цієї матриці.

Матриця, ранг якої менше ніж її порядок, називається виродженою матрицею (визначник дорівнює нулю). Для невироджених матриць (такими можуть бути тільки квадратні матриці) вводять поняття зворотної матриці.

Приклад 1.4.

Знайти ранг матриці $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Рішення. Матриця A третього порядку, тому її ранг не може бути більше трьох. Визначник третього порядку дорівнює 0:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 26 - 2 \cdot 22 + 3 \cdot 6 = 0,$$

але існує мінор другого порядку відмінний від 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

тому ранг матриці rank A=2.

1.6 Зворотна матриця

Умовою існування для матриці A оберненої матриці A^{-1} є нерівність нулю її визначника. Необхідність обчислення зворотної матриці пов'язана зі спрощенням виду матриці, тобто використовуючи одну з обернених матриць, можна звести іншу до діагонального вигляду, що спрощує обчислення.

Оберненою матрицею називається така матриця, для якої виконується співвідношення: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, де E – одинична матриця такої розмірності, що і розмірність матриці A.

Алгоритм обчислення зворотної матриці полягає в наступному:

1. Обчислюють визначник матриці A.

2. Визначають алгебраїчні доповнення до елементів матриці A.

3. На основі отриманих алгебраїчних доповнень утворюють приєднану матрицю. Її іноді називають ад'юнктом матриці A (adj A)

$$adjA = \widetilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

4. Обчислюємо зворотну матрицю за формулою::

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{\det(A)}. \tag{1.6}$$

Властивості зворотних матриць:

- $(A^{-1})^{-1}=A$;
- $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;
- $(A^{-1})^{T}A^{T}=(AA^{-1})^{T}=E^{T}=E$;
- $(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1}$;
- $\det(A^{-1})=1/\det(A)$.

Приклад 1.5.

Знайти матрицю A^{-1}, яка є оберненою до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Рішення. Обчислимо визначник матриці A

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -68 \neq 0 .$$

Визначник не дорівнює нулю отже, зворотна матриця існує. Знайдемо алгебраїчні доповнення всіх елементів

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17 ;\ A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 ; A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9 ;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17 ; A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 ; A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 ;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 17 ; A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -11 ; A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -21 .$$

Зворотна матриця має вид

$$A^{-1} = -\frac{1}{68} \begin{bmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{bmatrix} .$$

Перевіримо правильність обчислення зворотної матриці, для цього обчислимо

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} (-\frac{1}{68}) \begin{bmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{bmatrix} = -\frac{1}{68} \begin{bmatrix} -68 & 0 & 0 \\ 0 & -68 & 0 \\ 0 & 0 & -68 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E .$$

Отже, обчислення проведені правильно.

1.7 Власні значення та власні вектори матриць

Нехай A є квадратною матрицею, елементи якої a_{ij} (i=1…n, j=1...n) є дійсними числами. Тоді задача знаходження власних значень і власних векторів матриць зводиться до вирішення рівняння

$$A\overline{x} = \lambda \overline{x} , \tag{1.7}$$

відносно компонент невідомого вектора $\bar{x}$=(x_1, ..., x_n) та невідомою скалярної величини λ. Якщо знайдено певне рішення системи (1.7), то вектор $\bar{x}$ називається власним вектором матриці A, а λ – відповідним йому її власним значенням.

Рівняння (1.7), що визначає власні значення та власні вектори, еквівалентна рівнянню

$$(A-\lambda E)\bar{x}=0\,. \tag{1.8}$$

Вираз (1.8) дорівнює нульовому вектору, тоді, коли вирази в дужках дорівнюють нульовому вектору. Вираз в дужках називається характеристичною матрицею. Візьмемо визначник характеристичної матриці та прирівняємо його до нуля:

$$\det(A\text{-}\lambda E)=0. \tag{1.9}$$

Після розкриття виразу (1.9) отримаємо характеристичне рівняння n-го порядку матриці A. Загальний вид цього характеристичного рівняння:

$$D(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0=0\,. \tag{1.10}$$

Характеристичне рівняння (1.10) містить n коренів, які збігаються з власними значеннями матриці A.

Властивості власних значень:

- якщо коефіцієнти характеристичного рівняння є скалярними величинами, то власні значення, або дійсні, або зворотні комплексно-зв'язані пари;

- визначник матриці A пов'язаний з власними значеннями співвідношенням $\det A=\lambda_1\lambda_2...\lambda_n$;

- якщо матриця A невироджена та має власні значення λ_i $(i=1,...,n)$, то $1/\lambda_i$ є власними значеннями оберненою матриці A^{-1};

- якщо λ_i власні значення матриці A, то ці ж власні значення належать транспонованій матриці A^T.

Приклад 1.6.

Знайти власні значення та вектор матриці $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Рішення. Знайдемо характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \left| \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) + 2 =$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0 .$$

Корені характеристичного рівняння та відповідно власні значення матриці A дорівнюють $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$. Знайдемо власні вектора відповідають власним значенням матриці A:

1) корінь $\lambda_1 = 4$:

$$(A - \lambda_1 E)\bar{x}^1 = 0 ,$$

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda_1 & -2 \\ 1 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отримане матричне рівняння запишемо в наступному вигляді

$$\begin{cases} 1x_1^1 - 2x_2^1 = 0, \\ 1x_1^1 - 2x_2^1 = 0. \end{cases}$$

Вирішивши систему рівнянь, робимо висновок, що $x_1^1 = 2x_2^1$. Приймемо $x_2^1 = 1$, тоді власний вектор дорівнює $\bar{x}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2) корінь $\lambda_2 = 3$:

$$(A - \lambda_2 E)\bar{x}^2 = 0 ,$$

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda_2 & -2 \\ 1 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Запишемо матричне рівняння в наступному вигляді

$$\begin{cases} 2x_1^2 - 2x_2^2 = 0, \\ 1x_1^2 - 1x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Вирішивши систему рівнянь, робимо висновок, що $x_1^2 = x_2^2$. Приймемо $x_1^2 = x_2^2 = 1$, тоді власний вектор дорівнює $\bar{x}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1.8 Слід матриці

Слід матриці – сума елементів головної діагоналі квадратної матриці

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} . \tag{1.11}$$

Для позначення операції визначення сліду матриці використовується tr A або sp A.

Якщо характеристичне рівняння матриці A має коріння (власні значення) λ_1, λ_2, ..., λ_n, то $trA = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$.

1.9 Приведення матриці до діагонального виду

Нехай маємо векторно-матричне диференціальне рівняння виду:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t), \quad \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{1.12}$$

Квадратна матриця A має канонічну форму

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{1.13}$$

Вводимо неособливе лінійне перетворення:

$$\bar{x}(t) = V\bar{z}(t)\,,\ \det(V) \neq 0\,. \qquad (1.14)$$

В якості матриці V використовується матриця Вандермонда

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix},$$

де λ_i – власні значення матриці A виду (1.13).

При цьому всі власні числа дійсні та різні. Підставимо вираз (1.14) у (1.12), отримаємо

$$V\dot{\bar{z}}(t) = AV\bar{z}(t)\,,\ \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix}. \qquad (1.14)$$

Різниця між векторами $\bar{z}(t)$ та $\bar{x}(t)$: $\bar{x}(t)$ – характеризує динамічну систему, в будь-якій першій системі координат, а вектор $\bar{z}(t)$ – характеризує цю систему, але в іншій системі координат.

Помножимо ліву та праву частину виразу (1.14) на матрицю V^{-1} отримаємо

$$\dot{\bar{z}}(t) = V^{-1}AV\bar{z}(t)\,.$$

Введемо позначення $V^{-1}AV = \Lambda$, де Λ – тієї ж розмірності, що і матриця A, але її вигляд буде діагональний

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}. \qquad (1.15)$$

Контрольні завдання

Задача 1.1.

Для матриць

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

вичислить $4A - 3B + C$, $A^T + B^T$, $BC + A^2$, $AB + E$.

Задача 1.2.

Для матриць

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

вичислить $2B - 3C$, $AB + AC$, $BC^T + A^2$.

Задача 1.3.

Обчислити визначники $\Delta = \begin{vmatrix} 11 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 7 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ та $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 10 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

Задача 1.4.

Знайти матриці A^{-1} та B^{-1}, які зворотні до матриць

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \text{ і } B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Задача 1.5.

Знайти власні значення та вектори для матриць $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ і $C = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.