

УДК 621. 873

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В КРАНАХ С ПОДВИЖНОЙ КАРЕТКОЙ ПОДЪЕМА ГРУЗА

Дворников В. И., докт. техн. наук, профессор,

Геммерлинг В.А., студент,

Донецкий национальный технический университет

В работе описано моделирование динамических процессов в кранах с подвижной кареткой подъема груза и приведены полученные результаты.

In work modeling dynamic processes in cranes with the mobile carriage of rise of a cargo is described and the obtained results are adduced.

Проблема и ее связь с научными или практическими задачами. Краны с подвижной кареткой подъема груза широко используются в промышленности, строительстве и других отраслях народного хозяйства. К таким кранам относятся башенные, мостовые и козловые краны, которые схематически изображены на рис. 1.

Отличительной особенностью таких кранов является то, что грузовая каретка в общем случае совершает двухмерное движение в горизонтальной плоскости. В связи с этим концевой груз может интенсивно раскачиваться в поперечных направлениях с определенной амплитудой, которая зависит от характера движения каретки и режима подъема груза. Неуправляемые поперечные перемещения груза могут представлять реальную опасность для обслуживающего персонала и окружающих объектов и, как правило, доставляют известного рода неудобства при ведении монтажных и погрузочных работ (так называемая проблема позиционирования груза).

Анализ исследований и публикаций: в литературе, посвященной динамическим процессам в кранах, рассматривается методика определения динамических нагрузок. В работе [1] рассмотрены динамические нагрузки и параметры при подъеме груза и передвижении крана, приведены расчетные и конструктивные схемы механизмов. В работе [2] изложены основы теории динамических процессов в мостовых кранах.

Вопрос динамического состояния кранов с подвижной кареткой подъема груза при одновременном перемещении каретки и подъеме груза ранее не рассматривался.

Постановка задачі. Целью данного исследования является разработка математической модели динамического состояния крана с подвижной кареткой подъема груза, моделирование динамических процессов с помощью ЭВМ и получение конкретных параметров динамического состояния машины при нерегулируемом и регулируемом движении каретки.

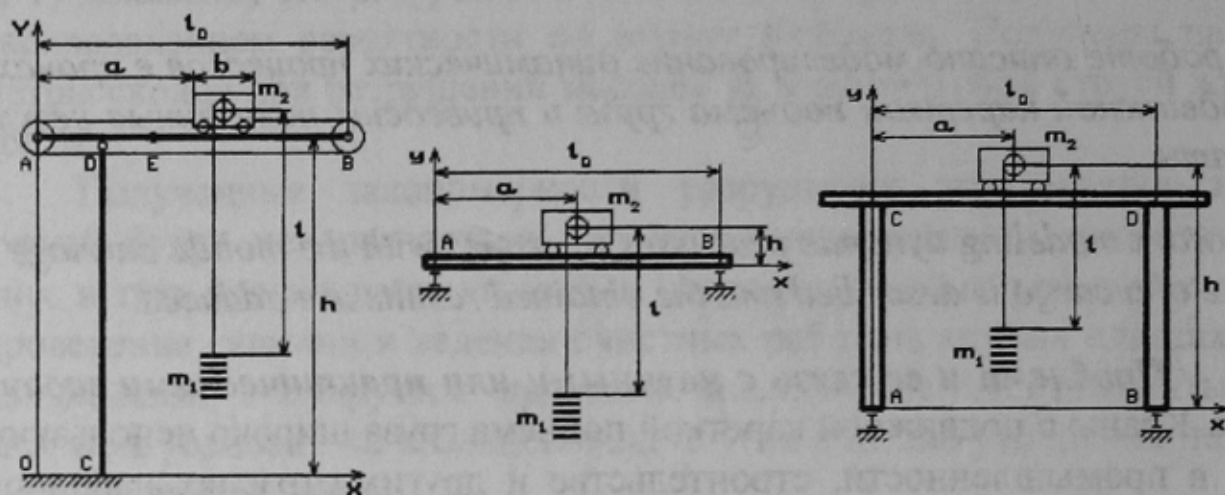


Рисунок 1 – Схемы башенного, мостового и козлового кранов

Изложение материала и результаты. Рассмотрим простейший вариант подъема груза, когда каретка совершает одномерное движение при отсутствии перемещения самого крана. Расчетная схематизация такого процесса показана на рис. 2.

Здесь изображены положения поднимаемого груза в двух состояниях – в начальном, когда длина отвеса каната равна l_0 , и в некотором текущем, когда барабан лебедки повернулся на угол φ против часовой стрелки, отвес каната образовал с вертикалью угол ψ , отсчитываемый также против часовой стрелки, а его длина стала равной l . Координаты груза в его текущем состоянии обозначим посредством символов x и y .

В этом текущем состоянии каретка переместилась таким образом, что точка набегания каната на барабан приобрела координату $X(t)$ в принятой системе отсчета XOY . Можно считать, что $X(t)$ является также и текущей горизонтальной координатой каретки, отсчитываемой от ее некоторого первоначального положения (на рис. 1 эта координата обозначена символом a).

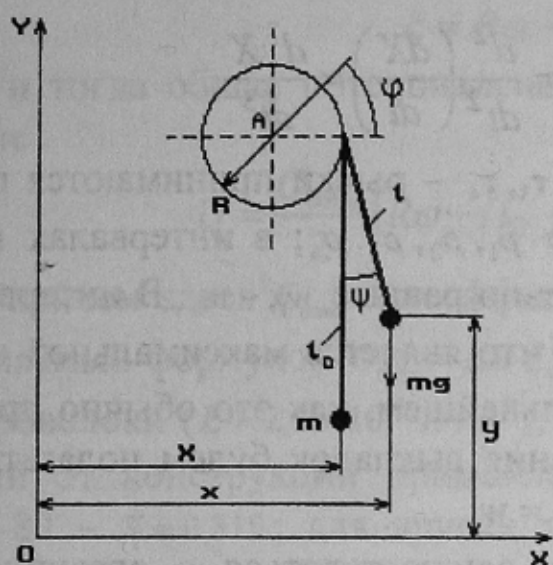


Рисунок 2 – Схема подъема груза при горизонтальном перемещении каретки

Будем полагать, что перемещение каретки задано, и при этом ее скорость $V(t) = \dot{X}(t)$ и ускорение $W(t) = \dot{V}(t) = \ddot{X}(t)$ изменяются, например, так, как показано на рис. 3.

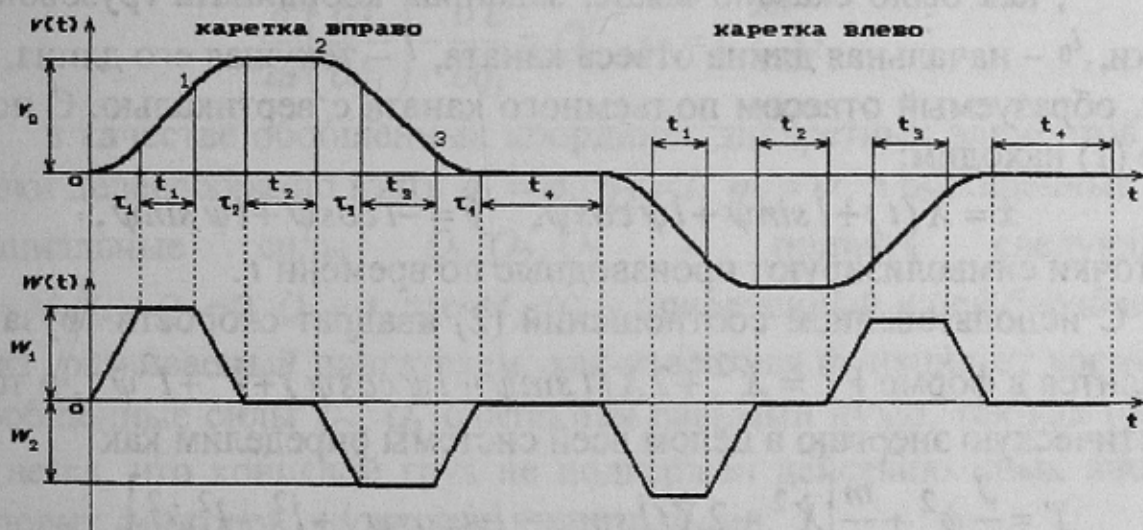


Рисунок 3 – Изменение скорости и ускорений каретки при ее горизонтальном перемещении

При этом предполагается, что в интервалах времени $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ имеет место движение с переменным ускорением (замедлением), то есть управление горизонтальным движением каретки осуществляется с ограничением рывка как первой производной от ускорения, или второй производной от скорости, или третьей производной от перемещения:

$$\rho(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2 X}{dt^2} \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{dX}{dt} \right) = \frac{d^3 X}{dt^3}.$$

В интервалах времени $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ – рывки принимаются постоянными, равными соответственно $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$; в интервалах t_1, t_2 – ускорения постоянны, соответственно равные $w_1, -w_2$. В интервале t_2 – скорость постоянная, равная v_0 , что является максимальной скоростью перемещения каретки. В дальнейшем, как это обычно принято на практике, а также для упрощения выкладок будем полагать, что $\rho_1 = -\rho_2 = -\rho_3 = \rho_4 = \rho$, $w_1 = -w_2 = w$.

Подъем груза также может осуществляться с ограничением рывка, то есть в соответствии с диаграммой, подобной представленной на рис. 3. В этом случае соответствующие динамические переменные, для различия, будем обозначать символами $\tilde{\rho}, \tilde{w}, \tilde{v}$.

С помощью схемы, приведенной на рис. 2, запишем текущие координаты груза в форме:

$$x = X(t) + l \sin \psi, \quad y = l_0 - l \cos \psi, \quad (1)$$

где $X(t)$, как было сказано выше, заданная координата грузовой тележки, l_0 – начальная длина отвеса каната, l – текущая его длина, ψ – угол, образуемый отвесом подъемного каната с вертикалью. С помощью (1) находим:

$$\dot{x} = \dot{X}(t) + \dot{l} \sin \psi + l \dot{\psi} \cos \psi, \quad \dot{y} = -\dot{l} \cos \psi + l \dot{\psi} \sin \psi, \quad (2)$$

где точки символизируют производные по времени t .

С использованием соотношений (2) квадрат скорости груза определится в форме $V^2 = \dot{X}^2 + 2\dot{X}(\dot{l} \sin \psi + l \dot{\psi} \cos \psi) + \dot{l}^2 + l^2 \dot{\psi}^2$, и тогда кинетическую энергию в целом всей системы определим как

$$T = \frac{J}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \left[\dot{X}^2 + 2\dot{X}(\dot{l} \sin \psi + l \dot{\psi} \cos \psi) + \dot{l}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 \right], \quad (3)$$

где φ – текущий угол поворота барабана; J – момент инерции барабана с присоединенными вращающимися массами редуктора и ротора двигателя (здесь считается этот параметр постоянным, то есть пренебрегается его изменением за счет присоединенной массы навиваемого на барабан каната); m – масса концевого груза.

Упругое удлинение качающегося отвеса каната определим как разность намотанной на барабан длины каната $R\varphi$ и фактического сокращения (уменьшения) длины каната на величину $(l_0 - l)$ в текущий момент времени:

$$\xi = R\varphi - (l_0 - l), \quad (4)$$

и тогда общая потенциальная энергия системы представится в форме

$$U = \frac{C_{омв}}{2} [R\varphi - (l_0 - l)]^2 + mg(l_0 - l \cos \psi), \quad (5)$$

причем здесь $C_{омв}$ – коэффициент жесткости отвеса каната, определяемый формулой $C_{омв} = E \bar{a} d_k^2 / l$, где E – модуль упругости стали проволоки ($E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$); \bar{a} – безразмерный параметр, зависящий от конструкции применяемого каната (для канатов ГОСТ 7668-80 – $\bar{a} \approx 0,315$; для других типов канатов численное значение этого параметра отличается незначительно); d_k – диаметр каната, м.

Функция Лагранжа $L = T - U$ с учетом (3) и (5) будет иметь вид

$$L = \frac{J}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \left[\dot{X}^2 + 2\dot{X}(l \sin \psi + l\dot{\psi} \cos \psi) + \dot{l}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 \right] - \frac{C_{омв}}{2} [R\varphi - (l_0 - l)]^2 - mg(l_0 - l \cos \psi). \quad (6)$$

В уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1, 2, 3), \quad (7)$$

в качестве обобщенных координат дискретных элементов установки целесообразно взять $q_1 = \varphi$, $q_2 = l$, $q_3 = \psi$, а обобщенные непотенциальные силы Q_1, Q_2, Q_3 – принять следующими: $Q_1 = M_{об}(t)$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$, где $M_{об}(t)$ – приведенный к оси барабана момент, развиваемый двигателем, как известная функция от времени t . Обобщенные силы Q_2, Q_3 считаются равными нулю, так как предполагается, что концевой груз не подвержен действию иных внешних силовых факторов, кроме уже учтенных сил.

Прежде чем приступить к записи уравнений движения путем подстановки (6) в уравнение (7), заметим, что в выражении (6), в силу свойств функций Лагранжа, слагаемые $m\dot{X}^2/2$ и $mg l_0$ можно не принимать во внимание, так как первое из них есть известная функция от времени t , а второе – есть обычная константа. Кроме того, так как слагаемое $m\dot{X}(l \sin \psi + l\dot{\psi} \cos \psi)$ можно представить в форме

$$m\dot{X}(l \sin \psi + l\dot{\psi} \cos \psi) = m\dot{X} \frac{d}{dt} (l \sin \psi) = m \frac{d}{dt} (\dot{X} l \sin \psi) - m\dot{X} l \sin \psi,$$

то, опуская здесь полную производную по времени от функции, содержащей время и обобщенные координаты l и ψ , в итоге вместо (6) получим:

$$L = \frac{J}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} [l^2 + l^2 \dot{\psi}^2] - \frac{C_{омв}}{2} [R\varphi - (l_0 - l)]^2 + ml(g \cos \psi - \ddot{X} \sin \psi), \quad (8)$$

что несколько упрощает процедуру построения уравнений движения.

В результате подстановки (8) в уравнения (7) получим следующую систему нелинейных уравнений динамического состояния рассматриваемой механической системы:

$$\left. \begin{aligned} J\ddot{\varphi} + C_{омв} R [R\varphi - (l_0 - l)] &= M_{об}(t), \\ m(\ddot{X} \sin \psi + \ddot{l}) + C_{омв} [R\varphi - (l_0 - l)] - mg \cos \psi - ml\dot{\psi}^2 &= 0, \\ ml(\ddot{X} \cos \psi + 2\dot{l}\dot{\psi} + l\ddot{\psi}) + gml \sin \psi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Для возможности аналитического решения полученных уравнений произведем их линеаризацию, отнюдь не искажающую физические процессы в рассматриваемой системе, что сделаем следующим образом.

Во втором уравнении системы (9) компонента $ml\dot{\psi}^2 = F_{\psi}$ представляет собой центробежную силу, возникающую при поперечных раскачиваниях груза. По абсолютной величине эта сила значительно меньше веса груза, если угол отклонения отвеса ψ (следовательно, и $\dot{\psi}$) сравнительно мал, и по этой причине из системы (9) слагаемым $ml\dot{\psi}^2$ можно пренебречь.

В третьем уравнении системы (9) компонента $2ml\dot{l}\dot{\psi} = M_{\kappa}$ является моментом силы Кориолиса, возникающей в результате поворота концевой массы вокруг точки набегания каната на барабан с одновременным перемещением вдоль оси каната. Момент кориолисовой силы, вообще говоря, может быть соизмеримым с восстанавливающим моментом $mgl \sin \psi$, следовательно, этим силовым фактором пренебрегать нельзя. Однако здесь целесообразно считать, что $\dot{l} \approx V_{cp}(t)$, где $V_{cp}(t)$ – некоторая функция времени, представляющая собой усредненную за период продольных колебаний скорость подъема груза, и эта скорость считается известной в силу заданной тахограммы движения. Тогда момент кориолисовой силы в результате линеаризации будет выглядеть как $M_{\kappa} = 2mlV_{cp}\dot{\psi}$. Далее, при малых углах отклонений отвеса подъемного каната можно считать, что $\cos \psi \approx 1$, $\sin \psi \approx \psi$, и тогда в результате всех указанных выше упро-

щений вместо нелинейной системы (9) получим, так сказать, частично линеаризованную систему

$$\left. \begin{aligned} J\ddot{\varphi} + C_{oms} R[R\varphi - (l_0 - l)] &= M_{\partial s}(t), \\ m(\ddot{l} + \ddot{X}\psi) + C_{oms}[R\varphi - (l_0 - l)] - mg &= 0, \\ ml^2\ddot{\psi} + ml(\ddot{X} + 2V_{cp}\dot{\psi}) + mgl\psi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Решения системы (9) или (10) позволяет определить максимальные поперечные перемещения груза при любом заданном законе перемещения каретки $X(t)$, максимальные динамические усилия в подъемном канате при различном характере изменения движущего момента $M_{\partial s}(t)$ и др.

Для реализации численного интегрирования системы (9) будем считать, что приводной двигатель подъема груза обладает *неограниченной мощностью* в том смысле, что двигатель в состоянии обеспечить подъем груза по наперед заданной тахограмме, типа приведенной на рис. 3. В такой идеализации движущий момент $M_{\partial s}(t)$ представим в форме

$$M_{\partial s}(t) = R \left[(m + J/R^2) \frac{d\tilde{v}(t)}{dt} + mg \right], \quad (11)$$

где, как оговорено выше, $\tilde{v}(t)$ – заданная скорость подъема в соответствии с принятой тахограммой, а выражение $m_{np} = m + J/R^2$ представляет собой приведенную к окружности навивки каната на барабан массу системы «груз-барабан».

Далее сделаем следующие операции. Так как в соответствии с обозначением (4) переменная ξ представляет собой упругую деформацию каната, то удобнее иметь дело именно с этой переменной, и тогда система уравнений (9) после элементарных преобразований примет вид

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{J}{R^2} + m \right) R\ddot{\varphi} &= \frac{M_{\partial s}(t)}{R} - mg + m\ddot{\xi} + m[g(1 - \cos\psi) - l\dot{\psi}^2 + \ddot{X}\sin\psi], \\ \ddot{\xi} + \omega^2\xi &= g\cos\psi + l\dot{\psi}^2 + R\frac{M_{\partial s}(t)}{J} - \ddot{X}\sin\psi = 0, \\ \ddot{\psi} + \frac{g}{l}\sin\psi &= -\frac{\ddot{X}}{l}\cos\psi - 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\psi}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где для квадрата собственной циклической частоты продольных колебаний груза на канате принято обозначение $\omega^2 = C_{омк} (1/m + R^2/J)$.

Текущая свободная длина каната l , входящая во второе и третье уравнение системы (14), определяется из соотношения (4) в виде

$$l = l_0 - R\varphi + \xi, \quad (13)$$

при этом угол поворота барабана φ определяется обычным двукратным интегрированием первого уравнения из системы (12).

Заметим, что, судя по структуре второго уравнения системы (12), переменная $\xi(t)$ является осциллирующей с частотой ω функцией. Тогда линейное перемещение точек на окружность навивки каната $R\varphi(t)$, оказывается, представляет собой суперпозицию осциллирующей с частотой ω функции, получающейся в результате двукратного интегрирования $\ddot{\xi}(t)$, и монотонно изменяющейся функции, получающейся в результате двукратного интегрирования выражения $M_{об}(t)/R - mg$. Аналогичное относится и к переменной $l(t)$, что следует из (13).

Монотонные составляющие переменных $R\varphi(t)$ и $l(t)$, как очевидно, представляют собой некоторые «средние» или *квазидинамические* компоненты соответственно угла поворота барабана и свободного отвеса подъемного каната. Так, из первого уравнения системы (12) с учетом представления (11) и обозначения (13) имеем, пренебрегая для этой цели выражением в квадратных скобках в (12):

$$R\varphi_{cp}(t) = \int_0^t \tilde{v}(\tau) d\tau, \quad l_{cp}(t) = l_0 - \int_0^t \tilde{v}(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Определяя, таким образом, текущее значение $R\varphi(t)$ из первого уравнения системы (12) в форме интеграла Дюамеля, получим:

$$R\varphi(t) = R\varphi_{cp}(t) + \frac{m}{m_{np}} \xi + \frac{m}{m_{np}} \int_0^t \{ g[1 - \cos \psi(\tau)] - l\dot{\psi}^2(\tau) + \ddot{X}(\tau) \sin \psi(\tau) \} (t - \tau) d\tau.$$

На рис. 4, 5, 6, 7 изображены графики, иллюстрирующие изменения во времени наиболее характерных динамических параметров рассматриваемой механической системы, полученные в результате численного интегрирования с помощью ЭВМ системы уравнений (12) с учетом (11), (13) и (14).

Здесь вертикальная шкала \bar{K} символизирует безразмерные динамические параметры системы, и цифрами обозначено: 1 – текущая скорость перемещения грузовой каретки, отнесенная к принятой мак-

симальной скорости каретки v_0 ; 2 – ускорение каретки, отнесенное к максимальному ускорению w ; 3 – скорость подъема груза, отнесенная к \tilde{v}_0 ; 4 – вспомогательная функция

$$\chi(t) = \{1 - C_{омв} [R\varphi - (l_0 - l)] / (mg)\} g / \tilde{w}, \quad (15)$$

где \tilde{w} – максимальное ускорение подъема груза; 5 – переменная длина отвеса подъемного каната, отнесенная к ее максимальной длине; 6 – угол отклонения отвеса каната от вертикали в градусах (шкала отклонений дана справа).

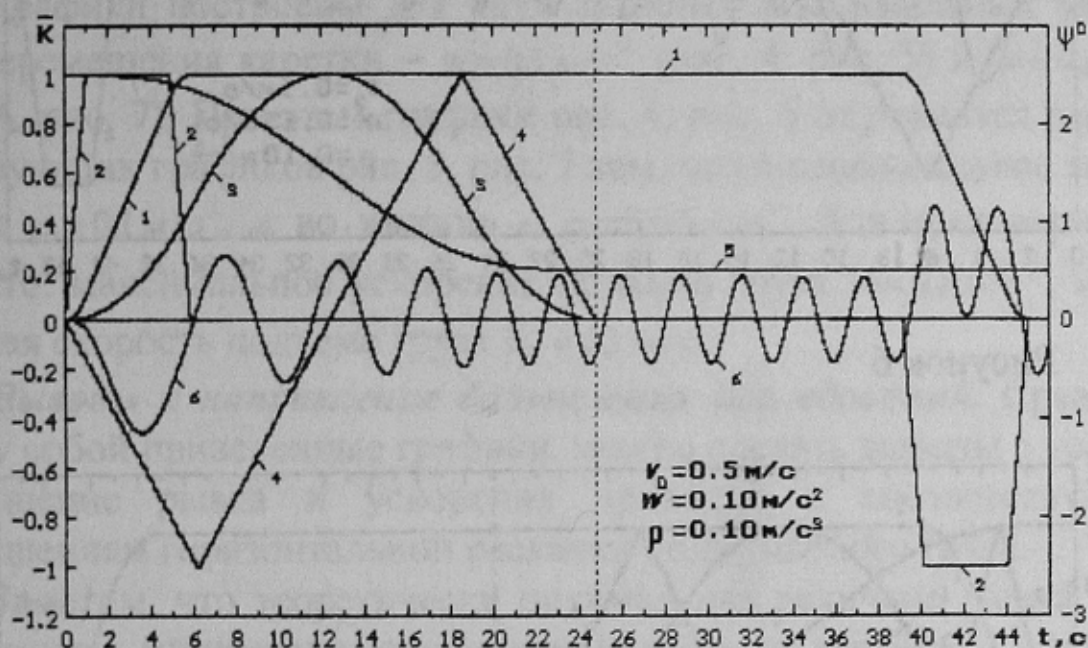


Рисунок 4

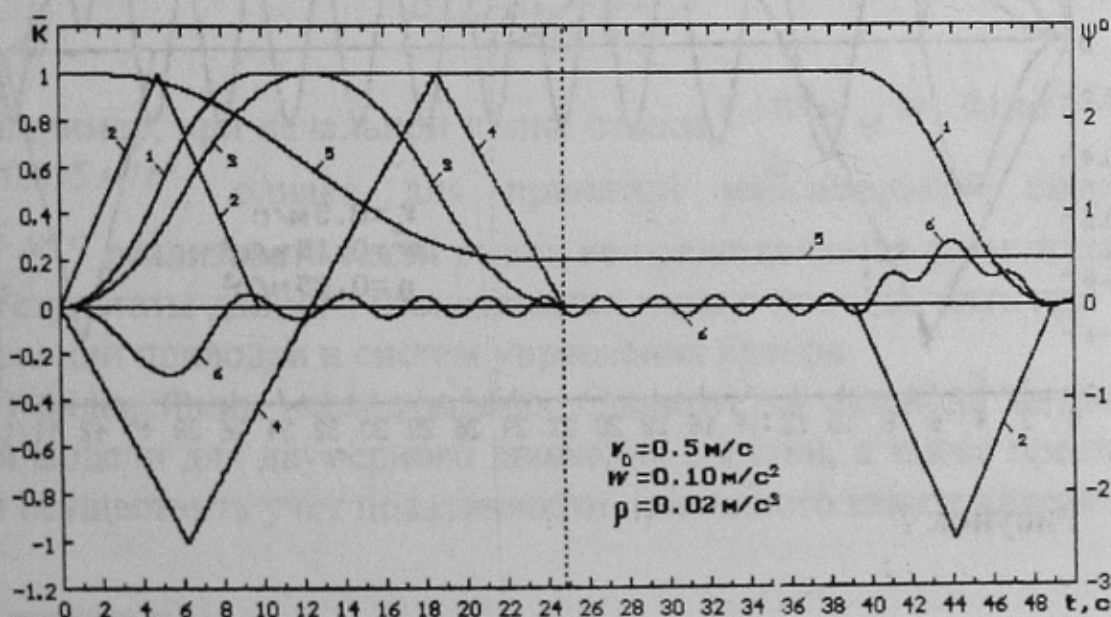


Рисунок 5

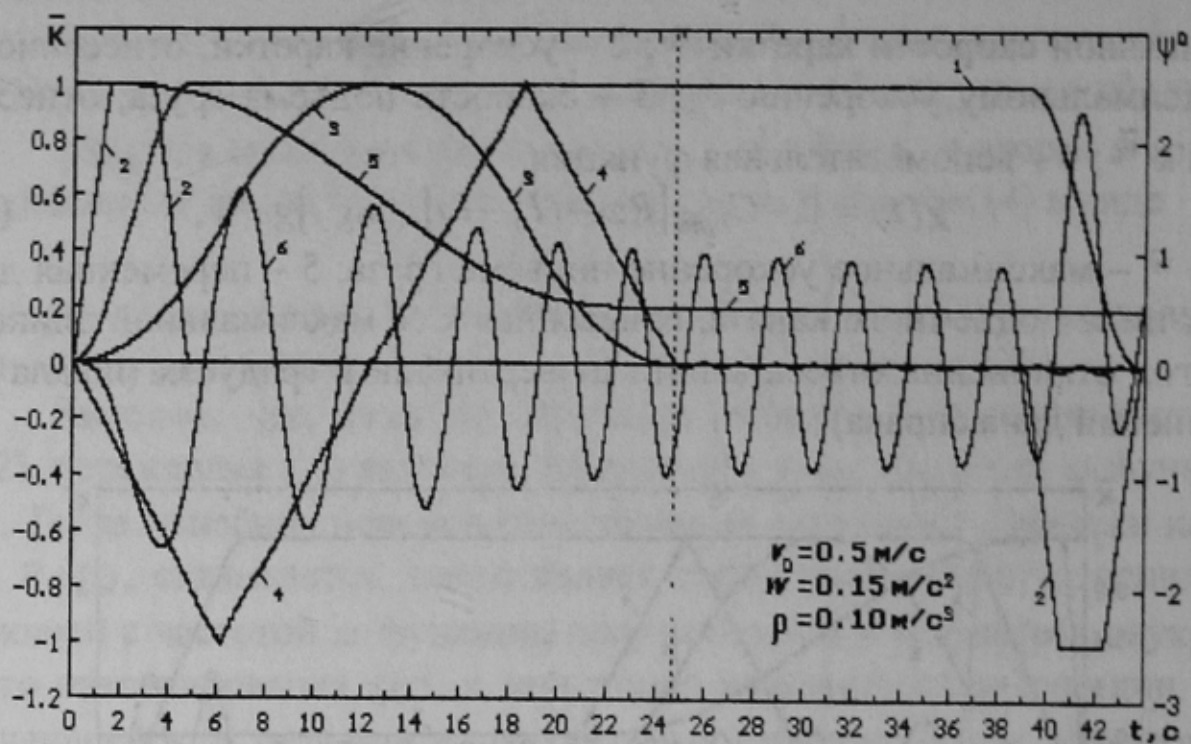


Рисунок 6

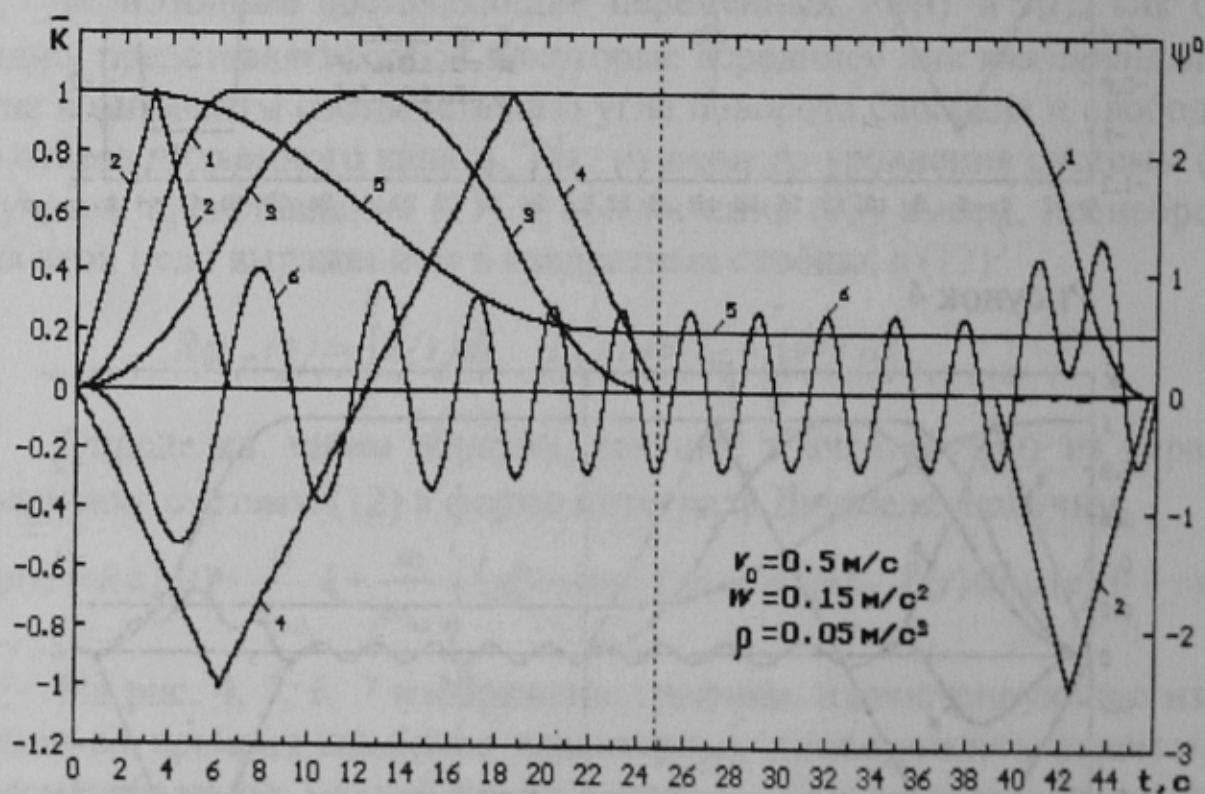


Рисунок 7

Вертикальной пунктирной линией на рисунках обозначен момент времени окончания подъема груза (момент стопорения барабана механическим тормозом).

Посредством функции $\chi(t)$ (15) усилие в подъемном канате определяется формулой:

$$P(t) = mg \left(1 - \chi(t) \frac{\tilde{w}}{g} \right), \quad (16)$$

Графики построены для двух значений максимальных ускорений перемещения каретки — $w = 0,1 \text{ м/с}^2$ (рис. 4, рис. 5) и $w = 0,2 \text{ м/с}^2$ (рис. 6, рис. 7). При этом графики рис. 4, рис. 6 отличаются от соответствующих графиков рис. 5, рис. 7 тем, что в первом случае принят рывок $\rho = 0,1 \text{ м/с}^3$, а во втором — $\rho = 0,02 \text{ м/с}^3$. Для всех вариантов принято: максимальное ускорение подъема груза $\tilde{w} = 0,1 \text{ м/с}^2$, максимальная скорость подъема груза $\tilde{v}_0 = 0,1 \text{ м/с}$.

Выводы и направление дальнейших исследований. Сравнивая между собой приведенные графики, можно сделать выводы о том, что уменьшение рывка и ускорения приводит к соответствующим уменьшениям горизонтальной раскачки поднимаемого груза.

Заметим, что теоретически оптимальная величина рывка, обеспечивающая минимальные отклонения груза от вертикали определяется по формуле:

$$\rho_{opt} = \frac{w}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}},$$

что, например, при начальной длине отвеса $l = 10 \text{ м}$ и $w = 0,1 \text{ м/с}^2$ дает $\rho_{opt} \approx 0,015 \text{ м/с}^3$, однако для принятой максимальной скорости $v_0 = 0,5 \text{ м/с}$ реализовать такой рывок не представляется возможным.

Результаты данного исследования можно использовать при проектировании приводов и систем управления кранов.

В дальнейших исследованиях планируется развитие математической модели для двумерного движения каретки, а также предполагается осуществить учет податливости приводного каната каретки.

Список источников:

- 1 Лобов Н. А. Динамика грузоподъемных кранов. — М.: Машиностроение. — 1987. — 156с.
- 2 Казак С. А. Динамика мостовых кранов. — М.: Машиностроение. — 1968. — 332с.