

УДК 621.647.1:621.316.1

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТРУМУ ВИТОКУ НА ЗЕМЛЮ ПІСЛЯ ЗАХИСНОГО ВІДКЛЮЧЕННЯ НАПРУГИ ЖИВЛЕННЯ ЕЛЕКТРОСПОЖИВАЧІВ ДІЛЬНИЦІ ШАХТИ**

Маренич К.М., канд. техн. наук, доц.; Василюк С.В., магістрант,  
Донецький національний технічний університет

*Обґрунтована та проаналізована математична модель струму витoku в умовах електротехнічного комплексу дільниці шахти після захисного відключення напруги.*

*The mathematical model of the leakage current circuit at mine's local electrotechnical system after its switching-off was made up and analysed.*

*Актуальність проблеми та її зв'язок з прикладними задачами.* Найважливішою вимогою до систем електропостачання технологічних дільниць вугільних підприємств є забезпечення достатнього рівня безпеки персоналу від ураження електричним струмом. На сьогодні це питання вирішується завдяки впровадженню апаратури відключення електромережі при наявності достатньої величини струму витoku на землю. Однак, ця апаратура не виконує повною мірою функції захисту людини від електроураження. Причиною є наявність в електричній мережі (після її відключення) зворотної ЕРС асинхронних двигунів (АД) споживачів дільниці.

Наслідком підвищення енергетичних показників гірничих машин стало вживання кабелів підвищеної довжини та перерізу, електродвигунів підвищеної потужності. Це обумовило суттєве підвищення активної та ємнісної провідностей ізоляції кабельної мережі дільниці та збільшення часу існування зворотної ЕРС двигунів після їх відключення від джерела живлення. Тому вивчення питання щодо формування електроуражаючих факторів з боку зворотної ЕРС асинхронних двигунів споживачів після їх відключення є актуальним.

*Аналіз досліджень та публікацій.* У роботах [1, 2] визначено основні складові струму витoku через тіло людини. Основну увагу приділено складовій цього струму, що існує до моменту автоматичного відключення мережі. В цих роботах вказується на ймовірну небезпеку, яку в принципі може створити зворотня ЕРС асинхронного двигуна споживача після відключення мережі. Подальші дослідження [3] довели, що зворотня ЕРС двигунів за певного співвідношення довжини кабеля та перетину жили може бути причиною небезпечних

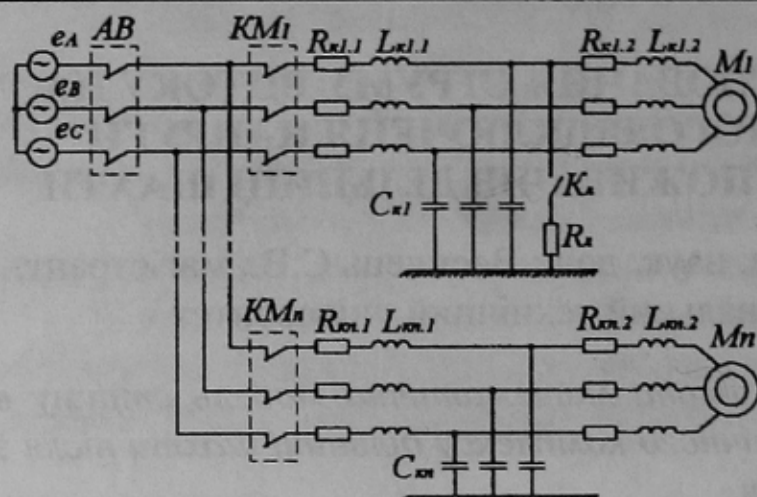


Рис. 1. Схема заміщення ЕТК дільниці шахти

що описує процеси у ланцюгу однофазного витоку (через опір тіла людини) в умовах електротехнічного комплексу (ЕТК) технологічної дільниці шахти після захисного відключення мережі.

**Основний матеріал та результати досліджень.** Схема заміщення ЕТК дільниці шахти наведена на рис. 1, де:  $e_A, e_B, e_C$  – миттєві значення фазної напруги на виході трансформаторної підстанції;  $AB$  – автоматичний вимикач;  $KM_1 - KM_n$  – контактори споживачів;  $R_{к1.1} - R_{кn.1}, L_{к1.1} - L_{кn.1}$  – відповідно активні та індуктивні опори кожної фази першої умовної ділянки всіх гнучких кабелів, що з'єднують елементи системи;  $R_{к1.2} - R_{кn.2}, L_{к1.2} - L_{кn.2}$  – теж саме для другої умовної ділянки;  $C_{к1} - C_{кn}$  – ємності фаз гнучких кабелів відносно землі;  $R_{л}$  – опір тіла людини;  $K_{л}$  – ключ, що моделює торкання людиною жили гнучкого кабелю;  $M_1 - M_n$  – асинхронні двигуни споживачів дільниці.

Після торкання людиною (момент  $t_n$ ) фази мережі відбувається захисне відключення джерела живлення шляхом спрацьовування  $AB$  за командою захисної апаратури (момент відключення -  $t_{AB}$ ). Протягом цього часу струм витоку має дві складові [2]: вимушену  $i'_{г1}$  та вільну  $i''_{г1}$ . Після відключення  $AB$  двигуни мережі, що були ввімкнені, переходять до режиму вибігу, генеруючи зворотну ЕРС, яка є причиною вимушеної складової струму витоку  $i'_{г2}$ .

рівнів струму витоку. Але ці висновки стосуються, здебільшого, комп'ютерного моделювання окремих процесів і не являють собою результатів досліджень узагальненої математичної моделі об'єкта.

#### Постановка задачі.

Задачею досліджень є розробка математичної моделі,



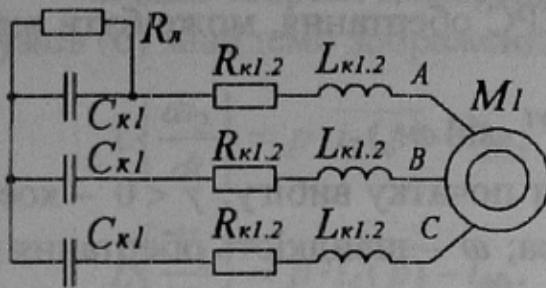


Рис. 2. Схема заміщення відгалуження першого споживача, де стався виток струму на землю (на інтервалі  $t_{KM} \leq t < t_3$ )

зворотньої ЕРС кожного двигуна. Вказаний момент для двигуна  $M_1$  позначено  $t_3$ . Струм через опір тіла людини на інтервалі  $(t_{KM}; t_3)$  також складається з вимушеної  $i'_{e3}$  та вільної  $i''_{e3}$  складових. Таким чином, в умовах, що розглядаються, струм витoku через опір тіла людини визначається виразом:

$$i_e = \begin{cases} i_{e1} = i'_{e1} + i''_{e1}, & t_n \leq t < t_{AB}; \\ i_{e2} = i'_{e2} + i''_{e2}, & t_{AB} \leq t < t_{KM}; \\ i_{e3} = i'_{e3} + i''_{e3}, & t_{KM} \leq t < t_3. \end{cases} \quad (1)$$

Складова струму витoku  $i_{e1}$  була визначена раніше [1, 2]. Актуальним є дослідження складових  $i_{e2}$  та  $i_{e3}$ .

Розглянемо випадок, коли контактори споживачів відключаються одночасно з АВ ( $t_{AB} = t_{KM}$ ). На рис. 2 наведена схема заміщення відгалуження першого споживача, в ланцюзі якого стався виток

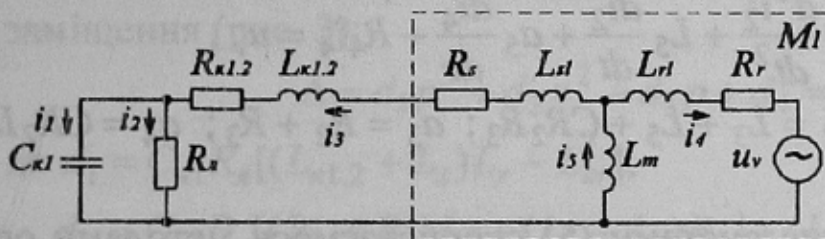


Рис. 3. Схема заміщення фази відгалуження, в якій стався виток, на інтервалі  $t_{KM} \leq t < t_3$ .

(рис. 3). Зворотня ЕРС АД позначена як  $u_v$ . В системі координат статора напруга  $u_v$  являє собою експоненціально затухаючу синусоїду

Після моменту відключення АВ, згідно законів комутації, через опір тіла людини тече, окрім вимушеної складової  $i'_{e2}$ , також вільна складова струму витoku  $i''_{e2}$ . З часом ЕРС групового вибігу знижується до рівня, коли контактори споживачів відключаються захистом мінімальної напруги (момент  $t_{KM}$ ), і двигуни  $M_1 - M_n$  переходять до одиночного вибігу, який триває до повного затухання

струму на землю, на інтервалі  $t_{KM} \leq t < t_3$ . Нехтуючи асиметрією системи, яка викликана наявністю однофазного опору  $R_n$ , розглянемо схему заміщення фази, в якій стався виток

[4] та, нехтуючи початковою фазою ЕРС обертання, може бути виражена наступним чином:

$$u_v = \xi \cdot e^{\gamma t} \cdot \sin \omega t, \quad (2)$$

де  $\xi$  – величина ЕРС ротора у момент початку вибігу;  $\gamma < 0$  – коефіцієнт затухання вільних струмів ротора;  $\omega$  – швидкість обертання ротора двигуна.

Приймаються наступні позначення:

$$\begin{aligned} C = C_{\kappa 1}; \quad R_2 = R_l; \quad R_3 = R_{\kappa 1.2} + R_s; \quad R_4 = R_r; \\ L_3 = L_{\kappa 1.2} + L_{sl}; \quad L_4 = L_{rl}; \quad L_5 = L_m; \quad i_2 = i_{e3}. \end{aligned} \quad (3)$$

З метою визначення струму  $i_2$ , який, згідно (3), дорівнює  $i_{e3}$ , складемо для схеми заміщення, (рис. 3) систему диференціальних рівнянь згідно законів Кірхгофа:

$$\begin{cases} i_3 = i_1 + i_2; \\ i_5 = i_3 + i_4; \\ -i_2 R_2 + \frac{1}{C} \int i_1 dt = 0; \\ L_5 \frac{di_5}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} + R_3 i_3 + R_2 i_2 = 0; \\ L_5 \frac{di_5}{dt} + L_4 \frac{di_4}{dt} + i_4 R_4 = u_v. \end{cases} \quad (4)$$

Після перетворень дана система рівнянь зводиться до системи двох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} a_1 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + a_2 \frac{di_2}{dt} + a_3 i_2 + L_5 \frac{di_4}{dt} = 0; \\ a_4 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + L_5 \frac{di_2}{dt} + a_5 \frac{di_4}{dt} + R_4 i_4 = u_v, \end{cases} \quad (5)$$

де  $a_1 = CR_2(L_3 + L_5)$ ;  $a_2 = L_3 + L_5 + CR_2 R_3$ ;  $a_3 = R_2 + R_3$ ;  $a_4 = CR_2 L_5$ ;  $a_5 = L_4 + L_5$ .

З метою розв'язання системи (5) скористаємося методами операторного числення [5]. Задамося початковими умовами:

$$i_2|_{t=t_{KM}} = i_{20}; \quad \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=t_{KM}} = i_{21}; \quad i_4|_{t=t_{KM}} = i_{40}. \quad (6)$$

Прийmemo, що зображеннями за Лапласом невідомих рішень системи (5), які задовольняють початковим умовам (6), є функції:

$$L\{i_2(t)\} = \overline{i_2(p)}, \quad L\{i_4(t)\} = \overline{i_4(p)}. \quad (7)$$



Згідно теоремі диференціювання оригінала та в силу початкових умов (6) знайдемо зображення похідних функцій  $i_2(t)$  та  $i_4(t)$ :

$$L\left\{\frac{di_2}{dt}\right\} = p \cdot \overline{i_2(p)} - i_{20}; \quad L\left\{\frac{d^2i_2}{dt^2}\right\} = p^2 \cdot \overline{i_2(p)} - p \cdot i_{20} - i_{21}; \quad (8)$$

$$L\left\{\frac{di_4}{dt}\right\} = p \cdot \overline{i_4(p)} - i_{40}.$$

Зображення функції  $u_v(t)$  записується наступним чином:

$$L\{u_v(t)\} = L\{\xi \cdot e^{\gamma t} \cdot \sin \omega t\} = \frac{\xi \cdot \omega}{(p - \gamma)^2 + \omega^2} = \overline{u_v(p)}. \quad (9)$$

Оскільки лінійній комбінації функцій відповідає аналогічна лінійна комбінація зображень даних функцій, знаходимо систему зображуючих рівнянь:

$$\begin{cases} \overline{\psi_1(p)} \cdot \overline{i_2(p)} + \overline{\psi_2(p)} \cdot \overline{i_4(p)} = \overline{\psi_5(p)}; \\ \overline{\psi_3(p)} \cdot \overline{i_2(p)} + \overline{\psi_4(p)} \cdot \overline{i_4(p)} = \overline{\psi_6(p)}, \end{cases} \quad (10)$$

де  $\overline{\psi_1(p)} = a_1 p^2 + a_2 p + a_3$ ;  $\overline{\psi_2(p)} = L_5 p$ ;  $\overline{\psi_3(p)} = a_4 p^2 + L_5 p$ ;

$\overline{\psi_4(p)} = a_5 p + R_4$ ;  $\overline{\psi_5(p)} = p a_1 i_{20} + a_1 i_{21} + a_2 i_{20} + L_5 i_{40}$ ;

$\overline{\psi_6(p)} = \overline{u_v(p)} + p a_4 i_{20} + a_4 i_{21} + L_5 i_{20} + a_5 i_{40}$ .

Детермінант системи (10) через проміжні змінні визначається наступним чином:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overline{\psi_1(p)} & \overline{\psi_2(p)} \\ \overline{\psi_3(p)} & \overline{\psi_4(p)} \end{vmatrix} = p^3 (a_1 a_5 - L_5 a_4) + p^2 (a_2 a_5 + R_4 a_1 - L_5^2) + p (a_3 a_5 + R_4 a_2) + R_4 a_3. \quad (11)$$

Запишемо детермінант системи через вихідні параметри схеми заміщення (рис. 3):

$$\Delta = d_1 p^3 + d_2 p^2 + d_3 p + d_4 = D_2(p), \quad (12)$$

де  $d_1 = C_{\kappa 1} R_{\eta} [(L_{\kappa 1.2} + L_s) L_r - L_m^2]$ ;

$d_2 = C_{\kappa 1} R_{\eta} [(R_{\kappa} + R_s) L_r + (L_{\kappa} + L_s) R_r] + (L_{\kappa} + L_s) L_r - L_m^2$ ;

$d_3 = R_r [C_{\kappa 1} R_{\eta} (R_{\kappa} + R_s) + L_s + L_{\kappa}] + L_r (R_{\eta} + R_{\kappa} + R_s)$ ;

$d_4 = R_r (R_{\eta} + R_{\kappa} + R_s)$ ;  $L_r = L_{rl} + L_m$ ;  $L_s = L_{sl} + L_m$ .

Для відшукування  $\overline{i_2(p)}$  необхідно визначити наступний детермінант:

$$\Delta_{\overline{i_2(p)}} = \frac{\overline{\psi_5(p)} \quad \overline{\psi_2(p)}}{\overline{\psi_6(p)} \quad \overline{\psi_4(p)}} = p^2(a_5b_1 - L_5b_4) + p(a_5b_2 - L_5b_4) + \\ + R_4b_2 - L_5p\overline{u_v(p)}, \quad (13)$$

де  $b_1 = a_1i_{20}$ ;  $b_2 = a_1i_{21} + a_2i_{20} + L_5i_{40}$ ;  $b_3 = a_4i_{20}$ ;  
 $b_4 = a_4i_{21} + L_5i_{20} + a_5i_{40}$ .

Враховуючи (9), з (13) отримаємо:

$$\Delta_{\overline{i_2(p)}} = \frac{(b_5p^2 + b_6p + R_4b_2)(p^2 - 2\gamma p + \gamma^2 + \omega^2) - pb_7}{(p - \gamma)^2 + \omega^2}, \quad (14)$$

де  $b_5 = a_5b_1 - L_5b_4$ ;  $b_6 = a_5b_2 - L_5b_4$ ;  $b_7 = L_5\xi\omega$ .

Детермінант (14) можна записати наступним чином:

$$\Delta_{\overline{i_2(p)}} = \frac{n_1p^4 + n_2p^3 + n_3p^2 + n_4p + n_5}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{N(p)}{D_1(p)}, \quad (15)$$

де  $n_1 = b_5$ ;  $n_2 = b_6 - 2b_5\gamma$ ;  $n_3 = R_4b_2 - 2b_6\gamma + b_5(\gamma^2 + \omega^2)$ ;  
 $n_4 = -b_7 - 2R_4b_2\gamma + b_6(\gamma^2 + \omega^2)$ ;  $n_5 = R_4b_2(\gamma^2 + \omega^2)$ ;  $p_{1,2} = \gamma \pm j\omega$ .

Враховуючи (12) та (15) знайдемо  $\overline{i_2(p)}$ :

$$\overline{i_2(p)} = \frac{\Delta_{\overline{i_2(p)}}}{\Delta} = \frac{N(p)}{D_1(p)D_2(p)}. \quad (16)$$

Оригінал  $i_2(t)$  для зображення  $\overline{i_2(p)}$  будемо шукати згідно другій теоремі розкладання [5]. Для цього необхідно знайти корені знаменника виразу (16), тобто корені полінома  $D_1(p)D_2(p) = 0$ . Рішення полінома  $D_1(p) = 0$  були знайдені раніше:  $p_{1,2} = \gamma \pm j\omega$ . Позначимо корені полінома третього степеня  $D_2(p) = 0$  через  $p_3$ ,  $p_4$ ,  $p_5$ . При заданих параметрах системи значення  $p_3$ ,  $p_4$ ,  $p_5$  можуть бути обчислені згідно відомої формули Кардана. Співвідношення дійсних та комплексних рішень серед  $p_3$ ,  $p_4$ ,  $p_5$  визначається відповідно до знаку дискримінанта полінома третього степеня. Проведені чисельні розрахунки для конкретних параметрів елементів ЕТК дільниці дозволили встановити, що дискримінант полінома  $D_1(p) = 0$  більший від нуля, тобто корені  $p_3$ ,  $p_4$  комплексно-сполучені, а корінь  $p_5$  є дійсним.

Згідно другій теоремі розкладання оригінал  $i_2(t)$  знаходиться за формулою (при коренях  $p_k$ , що не повторюються):



$$i_2(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad (17)$$

де  $n$  – порядок полінома знаменника виразу (16), в даному випадку  $n = 5$ ;  $A_k$  – коефіцієнти розкладання.

Коефіцієнти  $A_k$  визначаються згідно залежності:

$$A_k = \frac{N(p_k)}{D_1(p_k)D_2'(p_k) + D_1'(p_k)D_2(p_k)}. \quad (18)$$

Вираз (17) дозволяє аналітично виразити струм витoku через опір тіла людини після одночасного відключення електромережі захисною апаратурою АВ та контакторами КМ для конкретних параметрів ЕТК дільниці. Розглянемо обчислення вказаного струму на прикладі: АД типу ЭКВ3,5–180 (номінальна потужність 180 кВт), гнучкий кабель – КГЭЩ3х70 довжиною 300 м, опір тіла людини  $R_n = 1 \text{ кОм}$ , витік стався посередині кабеля. Після обчислення величин  $p_1, \dots, p_5$  та відповідних коефіцієнтів  $A_1, \dots, A_5$  згідно паспортних даних елементів ЕТК, маємо:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -12 \pm j300; p_{3,4} = -2081 \pm j93099; p_5 = -4; \\ A_{1,2} &= -5,30 \cdot 10^{-4} \pm j3,94 \cdot 10^{-2}; A_{3,4} = -1,24 \cdot 10^{-1} \mp j2,92 \cdot 10^{-3}; \\ A_5 &= 1,07 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Після підстановки отриманих значень параметрів до виразу (17), враховуючи, що  $i_{e3} = i_2$ , отримаємо аналітичний вираз струму витoku через опір тіла людини після одночасного відключення АВ та КМ у вказаних умовах та з урахуванням прийнятих припущень:

$$\begin{aligned} i_{e3} &= 2e^{-12t} \left( -5,30 \cdot 10^{-4} \cos 300t - 3,94 \cdot 10^{-2} \sin 300t \right) + \\ &+ 2e^{-2081t} \left( -1,24 \cdot 10^{-1} \cos 93099t + 2,92 \cdot 10^{-3} \sin 93099t \right) + \\ &+ 1,07 \cdot 10^{-3} e^{-4t}. \end{aligned} \quad (19)$$

Із отриманого виразу (19) можна встановити, що під час одиночного вибігу двигуна струм витoku через тіло людини складається з двох складових: вимушеної складової  $i'_{e3}$  (перший доданок виразу (19)), що являє собою експоненціально затухаючу періодичну функцію, параметри якої визначаються зворотньою ЕРС двигуна під час вибігу (рис. 4 а); вільної складової  $i''_{e3}$ , що дорівнює сумі експоненціально затухаючих періодичної функції та аперіодичної складової (другий та третій доданки виразу (19) відповідно), параметри яких

визначаються  $RLC$  – параметрами електричної системи (рис. 4 б). Графіки складових струму витоків через тіло людини наведені на рис. 4, де момент  $t_{KM} = 0$ .

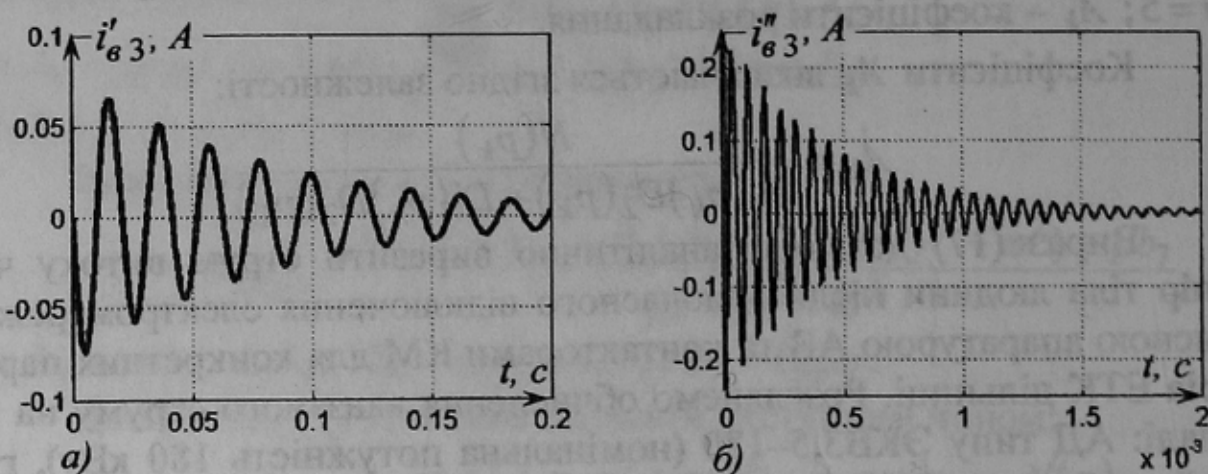


Рис. 4. Графіки складових струму через опір тіла людини, побудовані за умовами прикладу, що розглядається: а – вимушена складова; б – вільна складова.

**Висновки і напрямок подальших досліджень.** В ході досліджень була обгрунтована математична модель, що дозволяє розраховувати миттєві значення струму однофазного витоків через опір тіла людини для конкретних параметрів елементів ЕТК дільниці шахти при прийнятих припущеннях. Встановлений характер прояву складових струму витоків, для яких знайдено аналітичні вирази.

В ході подальших досліджень необхідно уточнити розроблену модель шляхом врахування активного опору ізоляції кабеля та асиметрії системи, що викликана наявністю однофазного витоків; встановити спільний вплив на струм витоків зворотної ЕРС двигунів під час групового вибігу.

Перелік посилань

1. Дзюбан В.С. Аппараты защиты от токов утечки в шахтных электрических сетях. - М.: Недра, 1982. - 152 с.
2. Риман Я.С. Защита подземных электрических установок угольных шахт. - М.: Недра, 1977. - 206 с.
3. Маренич К.Н. Проблематика электробезопасности системы «кабель-двигатель» участка шахты. Наукові праці Донецького державного технічного університету. Вип. 27, серія гірничо-електромеханічна.- Донецьк: ДонДТУ, 2001. - С. 270-277.
4. Ковач К.П., Рац. И. Переходные процессы в машинах переменного тока. - М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. - 744 с.
5. Шостак Р.Я. Операционное исчисление. Краткий курс. Изд. второе, доп. - М.: Высшая школа, 1972. - 280 с.

Дата поступления статьи в редакцию: 26.10.06