

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТРИЧНОЙ ПРОГОНКИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ПНЕВМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ УГОЛЬНОГО ПЛАСТА

Павлыш В.Н., Гребенкина А.С. (ДонНТУ, г. Донецк)
Тел. +38(062)3052301; E-mail: pavlysh@fvti.dgtu.donetsk.ua

Аннотация: Рассматривается численное решение системы уравнений математической физики, положенных в основу математической модели пневматического воздействия на угольный пласт, с помощью метода матричной прогонки.

Ключевые слова: процесс, параметр, модель, алгоритм, система.

THE APPLICATION OF METHOD OF MATRIX DRIVE FOR MODELING OF THE PROCESS OF PNEUMATIC ACTION ON COAL STRATUM

Pavlysh V.N., Grebyonkina A.S.

Abstract: The numerical solution of system of mathematical physics equations, formed the base of mathematical model of process of pneumatic action on coal stratum, using the method of matrix drive is considered.

Key words: process, parameter, model, algorithm, system.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ МАТРИЧНОЇ ПРОГОНКИ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПНЕВМАТИЧНОЇ ДІЇ НА ВУГІЛЬНИЙ ПЛАСТ

Павлыш В.М., Гребьонкина О.С.

Анотація: Розглянуто чисельне рішення системи рівнянь математичної фізики, покладених в основу математичної моделі пневматичної дії на вугільний пласт, за допомогою методу матричної прогонки.

Ключові слова: процес, параметр, модель, алгоритм, система.

Актуальность работы. Применение способов предварительной обработки для борьбы с проявлениями опасных свойств угольных пластов широко на шахтах и регламентировано нормативными документами [1].

Одним из эффективных способов снижения метановыделения из угольного пласта при его подземной разработке является пневматическая обработка через подземные скважины.

Для обоснования параметров воздействия необходимо выполнять математическое моделирование процесса, что связано с решением системы нелинейных уравнений в частных производных. Одним из наиболее эффективных методов решения является метод матричной прогонки. В этой связи тема работы является актуальной.

Цель работы – определение системы линейных алгебраических уравнений, позволяющих свести решение нелинейных уравнений математической физики к вычислению корней алгебраической системы.

Основное содержание работы. Механизм снижения природной газоносности пласта при нагнетании воздуха заключается в вытеснении свободного метана воздушным потоком в отточную скважину, приводящем к смещению сорбционного равновесия в системе «свободный - сорбированный газ» и десорбции метана с последующим его выносом. Одновременно при пневмообработке возможно снижение эндогенной пожароопасности за счет низкотемпературного окисления угля в массиве, приводящего к снижению его химической активности и, следовательно, склонности к самовозгоранию. Идея применения пневмообработки обоснована в [2], ряд важных результатов получен в [3].

Теоретические и экспериментальные исследования пневмообработки неувлажненного угольного пласта показали возможность интенсификации выноса метана по сравнению с дегазацией скважинами, позволили раскрыть механизм ряда физико-химических процессов, приводящих к снижению газоносности пласта и химической активности угля при нагнетании воздуха.

Поскольку нас будет интересовать не распределение газов в плоскости пласта, а движение потока в целом, можно считать, что коэффициент проницаемости и эффективная пористость не зависят от координат. Учитывая, что сжимаемость газов значительно выше сжимаемости угля, следует ожидать, что при небольших давлениях, развиваемых при пневмообработке, не будет существенной деформации массива. Поэтому примем коэффициент проницаемости и эффективную пористость пласта постоянными. Кроме того, параметры пневмообработки должны быть подобраны таким образом, чтобы не допустить существенного повышения температуры пласта, поэтому во всех уравнениях, кроме уравнения теплопроводности, значение температуры будем считать постоянным. С учётом сделанных предположений уравнения примут вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{kTR}{m^2 \mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[C \frac{\partial C}{\partial x} \right]; \quad (1)$$

$$\frac{\partial C_M}{\partial t} = \frac{kTR}{m^2 \mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[C_M \frac{\partial C}{\partial x} \right]; \quad (2)$$

$$\frac{\partial C_o}{\partial t} = \frac{KTR}{m^2 \mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[C_o \frac{\partial C}{\partial x} \right]; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\beta \frac{C}{m\rho\beta_y} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (4)$$

где

C – концентрация газа в фильтрационном объеме, г/см³;

T – абсолютная температура смеси газов, К°;

μ – вязкость смеси, н·с/м²;

m – мощность пласта, м;

ρ – плотность метановоздушной смеси, г/см³;

β_y, β – удельные теплоемкости угля и метановоздушной смеси, дж/кг·град;

R – газовая постоянная, дж/кг·град;

"м", "о" – индексы, относящиеся к метану и кислороду; переменная без индексов относится к метановоздушной смеси.

Начальные условия:

$$C(x,0) = C_m(x,0) = C_{m.исх};$$

$$C_o(x,0) = 0; \quad (5)$$

$$T(x,0) = T_o.$$

Граничные условия:

$$C(0,t) = \frac{P_n m}{RT}; \quad C_o(0,t) = 0.23 \frac{P_n m}{RT}; \quad (6)$$

$$C_m(0,t) = 0; \quad C(L,t) = \frac{P_{амм} m}{RT};$$

$$C_m(L_{м.с}, t) = 0.77 C(L_{м.с}, t); \quad C_o(L_{м.с}, t) = 0.23 C(L_{м.с}, t);$$

$$0 \leq x \leq L_{м.с}; \quad t \geq 0.$$

Здесь $C_{m.исх}$ – концентрации свободного метана в необработанном массиве;

P_n – давление нагнетания воздуха;

$L_{м.с}$ – расстояние между нагнетательной и отточной скважинами, м.

Рассмотрим математический аппарат, предлагаемый для решения поставленной краевой задачи.

Пусть имеем первую краевую задачу:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T \quad &u(x,0) = u_o(x) \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t) = \mu_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Обозначим:

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$\Lambda(t)y_i = \left(a(x_i, t) y_x \right) x, i = \frac{1}{h} \left[a(x_{i+1}, t) \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a(x_i, t) \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right].$$

Введем сетку $w_{h\tau} = w_h \times w_\tau$,

где $w_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = l\}$

$$w_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, K, K\tau = T\}$$

Обозначим $y_i^n = y(x_i, t_n)$ $y_{t,i}^n = \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau}$, $y_{\bar{x},i}^n = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2}$,
 $Lu \sim \Lambda(t)y_i$. Для того, чтобы $\Lambda(t)u - LC = O(h^2)$ достаточно выполнение условий:

$$\begin{aligned} a(x_{i+1}, t) + a(x_i, t) &= 2K(x_i, t) + O(h^2), \\ \frac{a(x_{i+1}, t) - a(x_i, t)}{h} &= K'(x_i, t) + O(h^2) \end{aligned} \quad (8)$$

В качестве $a(x_i, t)$ можно взять: $a(x_i, t) = 0.5(K(x_i, t) + K(x_{i-1}, t))$

Разностная схема с весами для задачи (7) имеет вид

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \Lambda(t)(\sigma y_i^{n+1} + (1-\sigma)y_i^n), i = 1, 2, \dots, N-1.$$

$$y_0^n = \mu_1(t_n), \quad y_N^n = \mu_2(t_n), \quad y_i^0 = u_0(x_i), \quad \text{где } t \in [t_n, t_{n+1}]$$

Определение 1. Разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор $L(L_h \sim L)$ в точке $x = x_i$, если $L_h V_i - L v(x_i) \rightarrow 0$, где $v(x)$ - достаточно гладкая кривая.

Определение 2. Решение $y_h(x) \rightarrow u(x)$, если $\|y_h - u\|_{c(w_h)} = \max_{x_i \in w_h} |y_h(x_i) - u(x_i)| \rightarrow 0$
 $h \rightarrow 0$

Определение 3. Разностная схема имеет m -й порядок точности (или сходится с порядком m), если $\|y_h - u\|_{c(w_h)} \leq Mh^m$, где $m > 0, M > 0 - const$.

Неявная схема: $\sigma = 1$

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \Lambda(t)y_i^{n+1}, i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_0^n = \mu_1(t_n), \quad y_N^n = \mu_2(t_n), \quad y_i^0 = u_0(x_i)$$

Рассмотрим нелинейное уравнение: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u)$

$$\text{Неявная схема: } \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left(a_{i+1} \frac{y_{i+1}^{n+1} - y_i^{n+1}}{h} - a_i \frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h} \right) + f(y_i^n),$$

где $a_i = 0.5(K(y_i^n) + K(y_{i-1}^n))$. Эта схема абсолютно устойчива и имеет погрешность аппроксимации порядка $O(\tau + h^2)$. В сокращенном виде: $y_{t,i}^n = \frac{1}{2}((Ky_{\bar{x}})_{x,i} + (Ky_x)_{\bar{x},i}) + f(y_i^n)$, где $K_i = K(y_i^n)$.

Рассматриваем задачу напорной фильтрации воздуха (1)...(6).

Воспользуемся схемой: $y_{t,i}^n = \frac{1}{2}((Ky_{\bar{x}})_{x,i} + (Ky_x)_{\bar{x},i}) + f(y_i^n)$, где $K_i = K(y_i^n)$,

$a_i = 0.5(K(y_i^n) + K(y_{i-1}^n))$. Пусть x, y, z, w соответственно приближенное решение системы:

$$\frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\tau} = \frac{Kw_i^n R}{m^2 \mu} \frac{1}{h} \left[\frac{(x_{i+1}^n + x_i^n)x_{i+1}^{n+1}}{2h} - \frac{(x_{i+1}^n + 2x_i^n + x_{i-1}^n)x_i^{n+1}}{2h} + \frac{(x_i^n + x_{i-1}^n)x_{i-1}^{n+1}}{2h} \right]$$

$$x_0^n = \frac{P_n m}{Rw_0^n}, \quad x_N^n = \frac{P_{am} m}{Rw_N^n}, \quad x_i^0 = C_{м.исх} = C_0$$

$$\begin{aligned}
\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} &= \frac{Kw_i^n R}{m^2 \mu} \frac{1}{h} \left[\frac{(y_{i+1}^n + y_i^n)x_{i+1}^{n+1}}{2h} - \frac{(y_{i+1}^n + 2y_i^n + y_{i-1}^n)x_i^{n+1}}{2h} + \frac{(y_i^n + y_{i-1}^n)x_{i-1}^{n+1}}{2h} \right] \\
y_0^n &= 0, \quad y_N^n = 0.77x_N^n, \quad y_i^0 = x_i^0 = C_0 \\
\frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} &= \frac{Kw_i^n R}{m^2 \mu} \frac{1}{h} \left[\frac{(z_{i+1}^n + z_i^n)x_{i+1}^{n+1}}{2h} - \frac{(z_{i+1}^n + 2z_i^n + z_{i-1}^n)x_i^{n+1}}{2h} + \frac{(z_i^n + z_{i-1}^n)x_{i-1}^{n+1}}{2h} \right] \\
z_0^n &= 0.23 \frac{P_n m}{Rw_0^n}, \quad z_N^n = 0.23x_N^n, \quad z_i^0 = 0 \\
\frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\tau} &= -\beta \frac{x_i^n}{m\rho\beta_y} \cdot \frac{w_{i+1}^{n+1} - w_i^{n+1}}{h}, \quad w_i^0 = T_0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Запишем систему для решения методом матричной прогонки:

$$\begin{aligned}
-\frac{2h^2 m^2 \mu}{Kw_i^n R} \frac{x_i^n}{\tau} &= (x_{i+1}^n + x_i^n)x_{i+1}^{n+1} - \left(x_{i+1}^n + 2x_i^n + x_{i-1}^n - \frac{2h^2 m^2 \mu}{Kw_i^n R} \right) x_i^{n+1} + \\
&+ (x_i^n + x_{i-1}^n)x_{i-1}^{n+1} \\
i = 1, 2, \dots, N-1, \quad x_0^n &= \frac{P_n m}{Rw_0^n}, \quad x_N^n = \frac{P_{am} m}{Rw_N^n}, \quad n = 0, 1, \dots, K-1 \\
y_i^{n+1} &= y_i^n + \frac{Kw_i^n R \tau}{2h^2 m^2 \mu} \times \\
&\times \left[(y_{i+1}^n + y_i^n)x_{i+1}^{n+1} - (y_{i+1}^n + 2y_i^n + y_{i-1}^n)x_i^{n+1} + (y_i^n + y_{i-1}^n)x_{i-1}^{n+1} \right] \\
y_0^n &= 0 \quad y_N^n = 0.77x_N^n \quad y_i^0 = x_i^0 = C_0 \\
z_i^{n+1} &= z_i^n + \frac{Kw_i^n R \tau}{2h^2 m^2 \mu} \times \\
&\times \left[(z_{i+1}^n + z_i^n)x_{i+1}^{n+1} - (z_{i+1}^n + 2z_i^n + z_{i-1}^n)x_i^{n+1} + (z_i^n + z_{i-1}^n)x_{i-1}^{n+1} \right] \\
z_0^n &= 0.23 \frac{P_n m}{Rw_0^n} \quad z_N^n = 0.23x_N^n \quad z_i^0 = 0 \\
\frac{-\beta x_i^n}{m\rho\beta_y h} w_{i+1}^{n+1} + \left(\frac{\beta x_i^n}{m\rho\beta_y h} - \frac{1}{\tau} \right) w_i^{n+1} &= -\frac{1}{\tau} w_i^n, \quad w_i^0 = T_0 \\
A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} &= -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad \alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i} \\
\beta_{i+1} &= \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i} \\
y_0 &= \chi_1 y_1 + \mu_1 \quad y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2 \quad \alpha_1 = \chi_1 \quad \beta_1 = \mu_1 \\
A_i \neq 0 \quad B_i \neq 0 \quad |C_i| &\geq |A_i| + |B_i| \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad |\chi_1| \leq 1 \quad |\chi_2| \leq 1 \\
y_i &= \alpha_{i+1} \cdot y_{i+1} + \beta_{i+1} \quad y_N = \frac{\chi_2 \beta_N + \mu_2}{1 - \chi_2 \alpha_N}
\end{aligned} \tag{10}$$

Реализация предложенной вычислительной схемы позволяет промоделировать процесс пневмообработки для решения вопроса об области ее применения и возможной эффективности как средства снижения газовыделения из угольного пласта.

Решения уравнений газовой динамики, как правило, разрывны - это либо слабые разрывы (например, «волна разрежения»), либо сильные

разрывы (ударные волны). Поэтому принцип сгущения сеток для проверки точности численного метода, следует применять с большой осторожностью.

Метод экспериментальной проверки сходимости схемы путем сгущения сетки, применяемый часто на практике в тех случаях, когда нет теоретических оценок качества схемы, может иногда привести к ошибочному выводу о сходимости схемы на том основании, что при сгущении сетки обнаруживается стремление решения разностной задачи к некоторой предельной функции $\bar{U}(x)$, которая, вообще говоря, может сколь угодно сильно отличаться от решения $U(x)$ исходной задачи.

Можно рекомендовать для проверки сходимости и порядка точности метод пробных функций. Выбирается некоторая функция $U(x)$ (она может быть выбрана произвольно, но так, чтобы выполнялись условия сопряжения в точках разрыва коэффициентов).

Второе замечание состоит в том, что, так как не всякая схема, сходящаяся в случае гладких коэффициентов, сходится в случае разрывных коэффициентов, то необходимо выделить семейство схем, сходящихся в классе разрывных коэффициентов, и в дальнейшем иметь дело только с такими схемами.

Выводы. Таким образом, на основе метода матричной прогонки получены соотношения, позволяющие свести решение нелинейных уравнений математической физики, описывающих процесс пневматической обработки угольного пласта, к решению линейной алгебраической системы.

При исследовании устойчивости конкретных двухслойных разностных схем необходимо привести разностную схему к каноническому виду и определить тем самым операторы A и B . Затем надо исследовать свойства оператора A . Если этот оператор является самосопряженным и положительным и не зависит от n , то надо проверить достаточные условия устойчивости разностной схемы.

Литература. 1. ДНАОП 1.1.30-1.XX-04. Безопасное ведение горных работ на пластах, склонных к газодинамическим явлениям (1-я редакция). – К.: Минтопэнерго Украины, 2004. – 268с. 2. Москаленко Э.М. Научные основы биохимического и физико-химического способов борьбы с метаном в угольных шахтах: Дис. ... д-ра техн. наук. - М., 1971. - 508с. 3. Штерн Ю.М. Совершенствование технологии нагнетания текучих в угольный пласт с целью повышения эффективности его обработки для борьбы с метаном и пылью в шахтах: Дис. ... канд. техн. наук: 05.05.04. - М., 1981. – 211с.