УДК 37.046.14 **Рогановский Н.М., Рогановская Е.Н., Антонов В.А.**

ДИДАКТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОИСКОМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Стаття присвячена одному з актуальних питань дидактики, психології та методики – дидактичному управлінню пошуком рішення математичних задач. Розглянуті основні види дидактичного управління пошуком рішення задач, обгрунтована необхідність конкретизації таблиці Пойа. Висвітлені спеціальні прийоми включення актуалізації знань у процесі пошуку рішення задач і запропонована модель пошуку рішення задач, яка включає схеми і ознаки математичних методів та формування спеціальних предметно орієнтованих евристичних навичок.

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными или практическими задачами. Виды дидактического управления. Проблема управления учебно-воспитательным процессом, познавательной деятельностью учащихся разрабатывалась многими исследователями. В разные периоды развития теории и практики обучения предлагались решения некоторых аспектов этой комплексной проблемы, начиная с общих вопросов организации управления школой и заканчивая управлением процессов мышления учащихся при решении ими определенных учебных задач. Понятие «управление» часто употребляется в контексте с понятиями «процесс», «организация», «структура», «система». Управление (включая и самоуправление) всегда связано с *выбором*. Учитель управляет учебно-воспитательным процессом, выбирая и конкретизируя определенным образом цели, содержание, методы, средства и формы обучения.

Виделение нерешенных ранее частей общей проблемы, которым посвящается данная статья. Управление учебной деятельностью, самоуправление, выполняемое учеником, обладают специфической особенностью. Действительно, крайне трудно производить этот выбор, если ученик постоянно находится в ситуации недостаточности предметной информации (в силу неполноты ее усвоения, частой сменяемости новых учебных тем, ограниченности учебного времени и т.д.), а также в ситуации отсутствия сформированных умений и навыков умственных действий (которые возможно еще труднее сформировать, нежели предметные знания). Ситуация осложняется еще и тем, что профессиональные знания и умения самого учителя находятся далеко не в идеальном состоянии. Нельзя не учитывать и тот факт, что в математике, психологии и дидактике отсутствует универсальный метод поиска решения задач, гарантирующий решение любой задачи.

Анализ последних исследований и публикаций, в которых начато решение данной проблемы и на которые опирается автор. Стало общепризнанным связывать обучение решению задач с обучением определенным эвристическим правилам (см., например, книгу Д.Пойа [1]). Однако отношение к подобному роду книг с самого начала их появления далеко неоднозначное. Говоря о книге Д.Пойа, видный современный алгебраист Б. Л. Ван-дер-Варден в своей вступительной лекции в Цюрихском университете (2 февраля 1952 г.) сказал, что «эту увлекательную книгу должен прочитать каждый студент, каждый ученый, а особенно каждый учитель». Столь же известный и не менее крупный математик Даламбер считал, что книги, трактующие об искусстве рассуждать, «полезны только для тех, кто может без них обойтись». Конечно, Даламбера можно объявить большим ученым и плохим педагогом (как это сделано редактором перевода Ю.М.Гайдуком), а можно увидеть более глубокие причины подобных расхождений.

Формулирование целей статьи (постановка задач). Целью данной статьи выступает анализ особенностей подходов к дидактическому управлению поиском решения задач.

Изложение основного материала исследования с полным обоснованием полученных научных результатов. Существуют три подхода к решению проблемы управления учебным процессом: с опорой на психологическую теорию учения, на кибернетику и подход, сочетающий два предыдущих. Основным средством управления поисковой деятельностью с точки зрения современной психологии является опора на ориентировочную основу действий. Так, по мнению Н.Ф.Талызиной, требованиям эффективного управления «удовлетворяет только одна теория – теория поэтапного формирования умственных действий, выдвинутая П. Я. Гальпериным».

В работе [4] выделяются следующие *виды управления*. Управление процессом обучения может быть стратегическим и тактическим. Стратегическое управление выражается в выборе определенной системы и технологии обучения, задающих ту или иную конкретизацию целей, содержания, средств, методов и форм обучения. Стратегическое планирование осуществляется в процессе выбора и конкретизации принципов обучения, обеспечивающих единство, целостность и целенаправленность процесса обучения. Оно осуществляется с помощью формирования системы задач (распределение задач по уровням сложности, по виду учебных проблем, выделение ключевых задач, задач, формирующих обязательные умения и навыки, задач для самоконтроля и т.д.).

Тактическое управление осуществляется внутри определенной системы или технологии обучения и строится с учетом общего их характера и особенностей. Если примером стратегического управления служит составление учебных программ и стандартов математического образования, то тематическое планирование, разработка технологии изложения отдельных фрагментов учебного материала – примеры тактического управления.

По своему стилю управление может быть авторитарным (все управленческие функции выполняет учитель или некоторые средства обучения) и не авторитарным (к организации процесса обучения привлекаются учащиеся – самоуправление, педагогика сотрудничества).

Особую роль играет оперативное управление, опирающееся на обратную связь. Обратная связь (от ученика – к учителю или к некоторому средству обучения) дает ученику и учителю информацию о качестве усвоения учебного материала и позволяет своевременно вносить необходимые коррективы в процесс обучения. В работе [4] предлагается более широкий состав видов обучения: неуправляемое (обратная связь отсутствует), слабо управляемое (обратная связь используется эпизодически), оптимально управляемое (обратная связь осуществляется систематически, но не носит чрезмерного характера) и жестко управляемое (обратная связь осуществляется систематически, носит чрезмерный, излишне мелочный пошаговый характер). Необходимо учитывать имеющую место закономерность: чем жестче управление, тем меньше остается возможностей для творческого развития учащихся.

Любое средство обучения, целенаправленно используемое в учебном процессе, выступает как средство управления (средство наглядности, традиционный учебник, электронный учебник и т.д.). Самыми же крупными средствами управления выступают системы и технологии обучения.

В зависимости от используемых средств выделяются автоматизированные и неавтоматизированные управления.

В зависимости от методов выделяются следующие виды управления: активизация познавательной деятельности учащихся, ориентация на диагностические цели, стимулирование готовности к определенной деятельности, включение учащихся в деятельность, регулирование и координация учебной деятельности, контроль со стороны учителя, самоконтроль и др.

Управление может рассматриваться в связи с видами и формами контроля: текущее, периодическое и итоговое управление, фронтальное, групповое, индивидуальное, комбинированное управление, самоуправление и др.

Необходимость конкретизации таблицы Пойа. Дидактическое управление поиском решения задач остается в центре внимания теории и практики обучения. В этой связи широкой известностью пользуется книга Д.Пойа [1] и приводимая в ней таблица эвристических правил. В кратком виде эта таблица воспроизведена ниже.

Таблица Пойа

<table>
<tr><td colspan="4">1. Понять предложенную задачу.
2. Найти путь от неизвестного к данным, если нужно, рассмотреть промежуточные задачи («анализ»).
3. Реализовать найденную идею решения (синтез).
4. Решение проверить и оценить критически.</td></tr>
<tr><td>1.
Что гласит задача? Что дано?
Что нужно найти? Определено ли неизвестное данными задачи? Нельзя ли сформулировать задачу иначе?
Нельзя ли найти связь между данной задачей и какой-нибудь задачей с известным решением? Или с задачей, решающейся проще? Решающейся сразу?
Все ли данные задачи были использованы?</td><td>2.
Сформулировать отношение (или отношения) между неизвестными и данными. Преобразовать неизвестные элементы. Попытаться ввести новые неизвестные, более близкие к искомым неизвестным. Преобразовать данные элементы. Попытаться получить новые элементы, более близкие к искомым неизвестным.
Решить только часть задачи. Удовлетворить только части условий: насколько неопределенным окажется тогда неизвестное? Обобщить. Рассмотреть частные случаи. Применить аналогию. Заменить термины их определениями (Паскаль).</td><td>3.
Испытывать правильность каждого шага, принимая лишь то, что «усматривается с полной ясностью или выводится с полной достоверностью» (Декарт).</td><td>4.
Правдоподобен ли результат? Почему? Нельзя ли сделать проверку? Нет ли другого пути, ведущего к полученному результату? Более прямого пути? Какие результаты можно получить на том же пути?</td></tr>
</table>

При всей полезности идей, заложенных в данной книге, следует констатировать, что в практике обучения они не получили значительного распространения. Объясняется это, на наш взгляд, тем, что указания и вопросы, этой таблицы, адресованы в большей мере не учащимся, а учителю. Для учащихся смысл указаний типа «Сформулировать отношение между неизвестным и данными. Преобразовать неизвестные элементы. Решить часть задачи. Сформулировать задачу иначе» и др. чаще всего остается непонятным в силу их общего и излишне абстрактного характера. Не меньшие затруднения учащихся вызывают попытки следовать этим указаниям: учащимся остается непонятным как нужно сформулировать отношение между данными и искомым, как преобразовать искомые элементы, как выделить часть задачи, как сформулировать задачу иначе и т.п. Получается, что для первичных советов и указаний в свою очередь требуются вторичные указания, для вторичных возможно – третичные и т.д. Анализ методической литературы показывает, что созданию эвристических таблиц предметно-конкретного, тематического, учебного плана не уделяется должного внимания. Между тем потребность в таких таблицах существует. Необходимы эвристические таблицы, ориентированные на специфику конкретной учебной темы, определенные виды задач и, главное, – на возрастные возможности учащихся.

Актуализация знаний как составная часть поиска решения задачи. Важным этапом поиска решения задач является актуализация соответствующих теоретических сведений. Какие теоретические сведения выбрать? Как ими воспользоваться? Как лучше всего выполнить рисунок к задаче? Эти вопросы вызывают определенные трудности у учащихся, особенно в начале систематического курса геометрии. Учащимся необходима определенная помощь. В какой форме эта помощь может быть оказана? Интересный подход обучения учащихся актуализации знаний предложен в работе [2, 7 кл.]. В этой работе, вопреки традициям, к самостоятельным и контрольным работам приводятся теоретические справки, иногда задача предлагается на готовом чертеже (см. приводимый ниже материал). Авторы считают, что при выполнении самостоятельных и контрольных работ не следует ограничивать доступ учащихся к справочным материалам. Проверяться должна не память, а понимание и умение решать задачи. На наш взгляд, такая установка положительно влияет на обучение учащихся актуализации знаний, приобретению эвристических навыков решения задач.

Самостоятельная работа 3

Определения:

Смежными углами называются два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.	***Окружностью*** с центром O и радиусом R называется множество всех точек плоскости, удаленных от центра O на расстояние, равное R.

Вариант 1. 1. Один из смежных углов меньше другого на 40°. Найдите эти углы.

2. При пересечении двух прямых образуется несколько углов. Сумма двух из них равна 160°. Найдите каждый угол, составляющий эту сумму. Выполните рисунок и укажите на нем эти углы.

3. Точки B и D — точки пересечения двух окружностей произвольного радиуса с центрами A и C. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta ADC$ (рис. 1).

4. С помощью транспортира постройте угол, равный $\frac{1}{6}$ развернутого угла.

Самостоятельная работа 4

Определения:

Вертикальными углами называются два угла, если стороны одного из них являются продолжениями сторон другого.	***Периметром треугольника*** называется сумма всех трех его сторон.

Вариант 1. 1. Разность двух смежных углов равна 80°. Найдите и постройте эти углы.

2. Сумма двух вертикальных углов равна 180°. Найдите и постройте эти углы.

3. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, точка D — середина стороны AC. Докажите, что $\angle ADB = \angle CDB$ (рис. 2).

4. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC, углы AMB и CMB равны. Докажите, что $AB = BC$.

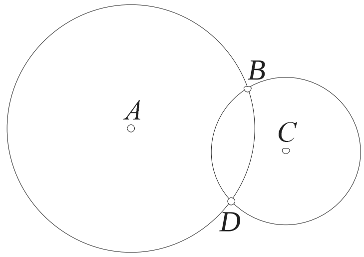

Рис. 1

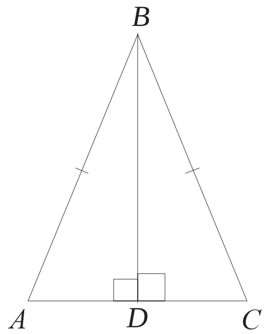

Рис. 2

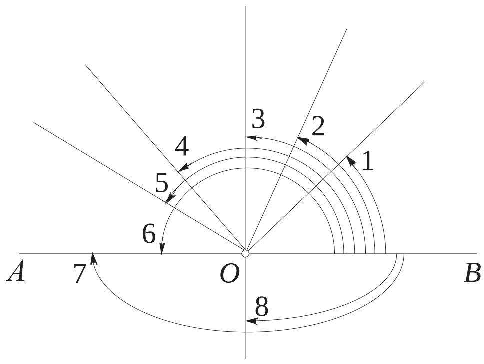

Рис. 3

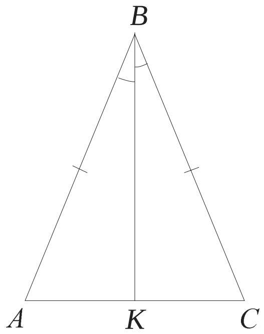

Рис. 4

Контрольная работа 1

Признаки равенства треугольников. *Два треугольника равны*, если:

1-й *признак*: две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника;

2-й *признак*: сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника;

3-й *признак*: три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника.

Вариант 1.

1. Укажите, какие углы на рисунке 3 являются острыми.

2. Докажите, что если два угла равны, то смежные с ними углы также равны.

3-4. Разность смежных углов равна 64°. Найдите и постройте эти углы.

5. В треугольнике ABC $AB = BC$, K — середина стороны AC. Докажите, что $\angle CKB$ = 90° (рис. 4).

Схемы и признаки математических методов как центральная часть эвристической таблицы. Схемы математических методов служат эвристическими алгоритмами, во многих случаях эффективно направляющими процесс поиска и решения задачи. Если ученик правильно выбрал метод решения задачи, то дальнейшие его поисковые действия становятся более целенаправленными и последовательными.

Такие схемы должны стать неотъемлемой частью школьных учебников. В учебниках [3, 8-9 кл.] эти схемы приводятся в виде таблиц (таблицы 1-5). В учебнике [3, 10 кл.] подобные схемы представляются иногда в виде блок-схемы алгоритма. К теме «Решение произвольного треугольника» приведена следующая блок-схема алгоритма (рис. 5). Приведенные схемы математических методов мы рассматриваем как одно из главных средств управления поиском решения задач. Не менее важно приучать учащихся видеть приметы тех или иных математических методов (в текстах задач, в чертежах, тематической отнесенности задач и т.д.).

Следующий более конкретный этап управления поиском связываем с отдельными группами и видами задач.

Таблицы 1–5

Схемы математических методов

Как решить задачу методом равных треугольников?	**Как решить задачу на доказательство?**
1. Выделите элементы, равенство которых надо доказать. 2. Найдите равные треугольники. 3. Докажите равенство этих треугольников. 4. Сделайте вывод о равенстве выделенных ранее элементов.	1. Постройте чертеж. 2. Выделите условия и заключение задачи. 3. Вспомните определения, признаки и свойства геометрических фигур, о которых говорится в задаче. 4. Из условия задачи делайте логические выводы. Проследите, все ли условия задачи использованы.

Как решить задачу на вычисление?	**Как решить задачу координатным методом?**	**Как решить задачу векторным методом?**
1. Постройте чертеж. 2. Обозначьте искомую величину через x. 3. Выразите через x неизвестные величины. 4. Составьте и решите уравнение. 5. Запишите и проверьте ответ	1. Постройте чертеж. 2. Удобно расположите систему координат. 3. Запишите координаты точек. 4. Запишите условие и требование задачи на координатном языке. 5. Перейдите от условия задачи к ее требованию	1. Постройте чертеж. 2. Запишите условие и требование задачи на векторном языке. 3. Перейдите от условия задачи к ее требованию.

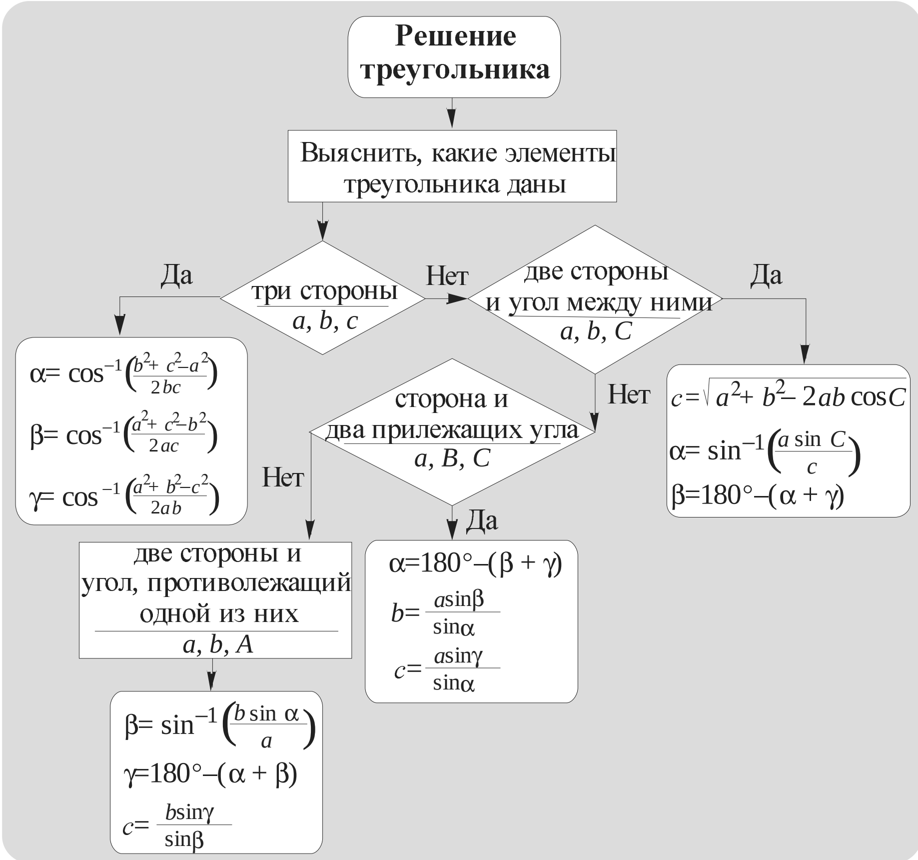

Рис. 5. Блок-схема алгоритма к теме «Решение произвольного треугольника»

Формирование специальных предметно ориентированных эвристических навыков. К таким навыкам мы относим, прежде всего, выведение следствий из условия задачи (аналитический метод поиска), подбор достаточных условий для требования задачи (анализ Паппа) и вывод следствий из требования задачи (анализ Евклида). Именно эти методы осуществляются с помощью дедукции, составляющей характерную особенность математики. Все другие методы поиска в математике в конечном итоге также замыкаются на дедуктивном методе. Затруднения учащихся вызываются тем, что не всегда указанные методы поиска решения задачи становятся непосредственным предметом обучения. Для выделения их в качестве предмета обучения нужны в учебниках специальные задачи. Приведем примеры таких задач из авторского учебника [3, 8 кл.].

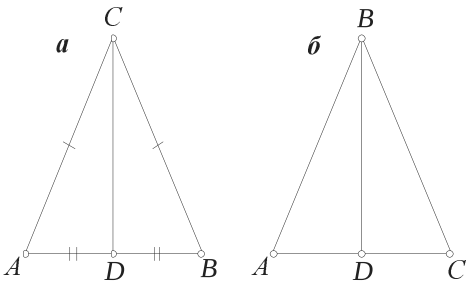

Рис. 6

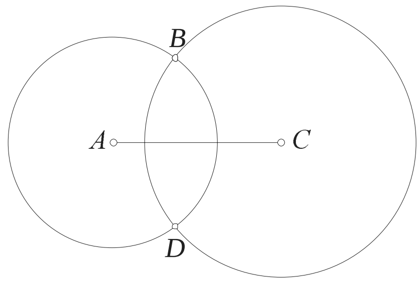

Рис. 7

Достаточно ли данных для решения задачи?

49. а) На рисунке 6,а отмечены равные элементы треугольников *ADC* и *BDC*. Достаточно ли этих данных для доказательства следующих равенств: 1) $\Delta ADC = \Delta BDC$, 2) $\angle ACD = \angle BCD$, 3) $\angle ADC = \angle BDC = 90°$?

б) Укажите на рисунке 6,б минимальное количество данных (о равенстве сторон и углов), достаточных для доказательства утверждений: 1) $AB = BC$; 2) $\angle A = \angle C$.

Что можно доказать на основании имеющихся данных?

50. Что можно доказать на основании этих данных:

а) На отрезке *AC* (рис 7) взяли произвольную точку *M* и соединили ее отрезками с точками *B* и *D*.

б) На отрезках *AB* и *AD* (проведите их на рисунке 7) отложили равные отрезки *AP* и *AT*. Точки *B*, *P*, *T* и *D* соединили с точкой *C*, получили треугольники *CBP* и *CDT*.

в) На сторонах *CA* и *CB* треугольника *ACB* (см. рис. 6,а) отложили равные отрезки *CM* и *CH*. Точки *M* и *H* соединили отрезком. Отметили точку *K* – точку пересечения отрезков *MH* и *CD*.

г) На рисунке 7 точки *B* и *D* соединили отрезком. Отметили точку *E* — точку пересечения отрезков *BD* и *AC*.

К разработке тематически ориентированной эвристической таблицы. Пример тематически ориентированной эвристической таблицы применительно к теме «Замечательные точки треугольника» приведен в работе [2, 10 кл.] (см. таблицу 6). Серым фоном здесь выделены советы и указания, отражающие специфику данной темы. Эта часть таблицы является вариативной, остальная часть таблицы остается инвариантной в различных учебных темах. Данную таблицу можно рассматривать как первый этап конкретизации таблицы Пойа. Второй этап относим к отдельным группам задач. Подобную конкретизацию призван выполнять каждый учитель. Данное умение мы рассматриваем как необходимую составляющую его методического мастерства.

Таблица 6.

Эвристическая таблица к теме «Замечательные точки треугольника»

I. Изучите задачу. Отразите на чертеже условие и требование задачи. Вспомните теоретические сведения, необходимые для ее решения.	**1**. Выделите (по отдельности) все условия и все требования задачи: что дано в задаче? Что еще дано? Что требуется найти или доказать? **2.** Выполните чертеж к задаче: проверьте, все ли условия задачи отражены на нем. Правильно ли выполнен чертеж? Если в задаче говориться о центроиде треугольника, то проведите медианы; если о центре окружности, описанной около треугольника, – проведите серединные перпендикуляры к сторонам треугольника, радиус окружности; если о центре вписанной окружности – проведите биссектрисы треугольника, отметьте точки касания, проведите радиус окружности; если об ортоцентре треугольника – проведите высоты треугольника и т.д.

	3. Запишите кратко задачу: еще раз убедитесь в том, что никакое условие и требование задачи не оказалось забытым.
II. Поиск решения задачи	**4.** Обдумайте план решения задачи. Не торопитесь проводить сразу вычисления. Подумайте над тем, с чего начать решение, какую величину можно найти вначале. Затем попытайтесь рассуждать таким образом: допустим, что эту величину нашли, каким образом ею можно воспользоваться дальше? Повторяйте этот прием как можно чаще! **5.** Решение до конца не просматривается. Как быть? Возможно, для решения задачи требуется дополнительное построение. Какое? Возможно, что искомую величину удобнее найти из другого треугольника… **6.** Все ли условия задачи использовали при ее решении? **7.** Какие понятия используются в задаче? Как они определяются? Какие теоремы, связанные с ними, вам известны? **8.** Анализируйте чертеж, подмечайте имеющиеся на нем закономерности. **9.** Комбинируйте условия задачи в пары и выясняйте, что можно найти с помощью этих условий. **10.** Не забыли ли вы, к чему следует стремиться? Требование задачи никогда не следует забывать. Приближаетесь ли вы к требованию задачи? **11.** Возможно, полезно задаться вопросом: «Чтобы ответить на вопрос задачи, что достаточно знать?»
III. Запись найденного решения	**12.** Если задача решена, то обдумайте, как кратко записать ее решение. Пользуйтесь математической и логической символикой. Разбейте решение на отдельные шаги и пронумеруйте их.
IV. Проверка решения	**13.** Обратите внимание на то, правдоподобен ли полученный вами ответ. Приучайте себя к самоконтролю и самопроверке. Какие этапы решения задачи вызывают сомнение? Проверьте их.
V. Задача решена. Что дальше?	**14.** Понравилось ли вам найденное решение? Нельзя ли задачу решить проще, оригинальнее? Полезно иметь в виду, что решение задачи различными способами, как правило, оценивается высшим баллом. **15.** Не нужно бояться трудных задач. Если вы чаще будете решать такие задачи, то они окажутся для вас не такими уж трудными.

Литература:

1.Пойа Д. Как решать задачу. – М.: ГУПИ МП РСФСР, 1961.

2. Рогановский Н.М., Рогановская Е.Н. Дидактические материалы по геометрии:– Мн.: Нар. асвета – 7 кл., 2007. – 10 кл., 2008.

3. Рогановский Н.М., Рогановская Е.Н., Тавгень О.И. Геометрия. Учебное пособие для учреждений, обеспечивающих получение общего среднего образования (углубленный уровень). – Мн.: Нар. асвета, – 8 кл. – 2005; – 9 кл. – 2006; – 10 кл. – 2007.

4. Рогановская Е.Н. Электронный школьный учебник: теория и практика создания. В 2-х частях. Ч.1. Методология и технология конструирования. – Могилев, МГУ им. А.А.Кулешова, 2005.

Статья посвящена одному из актуальных вопросов дидактики, психологии и методики – дидактическому управлению поиском решения математических задач. Рассмотрены основные виды дидактического управления поиском решения задач, обоснована необходимость конкретизации таблицы Пойа. Рассмотрены специальные приемы включения актуализации знаний в процесс поиска решения задач. Предложена *модель поиска решения задач, включающая схемы и признаки математических методов и формирование специальных предметно ориентированных эвристических навыков.*

The article is dedicated to one of the current questions of didactics, psychology and methods – didactic control over the search for a solution to mathematical problems. The main means of didactic control over the search for solutions are discussed, the necessity for a definition of Polya's table is shown. Specialized methods of the inclusion of the actualization of problems in the search process are discussed. A model for the search of solutions to problems, including diagrams and indications of mathematical methods and the formation of special subject – oriented communication skills is proposed.