

УДК 624.4 (085.80)

Ф.Л. ШЕВЧЕНКО (д-р техн. наук, проф., зав. каф.)

Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, Украина

О.А. РУСАНОВА (канд. техн. наук, доц.)

Донецкий национальный университет, г. Донецк, Украина)

ЭПЮРЫ УГЛОВ ЗАКРУЧИВАНИЯ СЕЧЕНИЙ НЕВЕСОМЫХ ВАЛОВ С ДИСКАМИ

Рассматривается определение положения неподвижного сечения и эпюр углов закручивания невесомых валов с сосредоточенными массами при статическом и динамическом нагружении.

невесомый вал, сосредоточенные массы, неподвижное сечение, частоты колебаний, собственные колебания

Введение

В существующей литературе по механике упругих деформируемых систем при рассмотрении валов закручивания поперечных сечений при кручении свободных незакрепленных валов вычисляются углы закручивания отдельных участков вала, а затем последовательно суммируются деформации от принятого начала координат. При этом чаще всего за начальное неподвижное сечение принимают крайнее торцевое сечение вала и от него строят эпюру перемещений [1, 2]. Однако это не соответствует истинным перемещениям сечений, так как положение неподвижного сечения не известно. В предложенной статье показано, как найти неподвижное сечение и какой вид будет иметь истинная эпюра углов закручивания невесомого вала при статическом и динамическом нагружении.

Основное содержание работы

1. Статическое нагружение

Эпюры углов закручивания свободных невесомых валов строятся в предположении наличия неподвижного сечения. Обычно за неподвижное сечение принимается крайнее торцевое сечение вала. Принимать такое предположение правомерно, так как свободный вал находится в безразличном состоянии равновесия. Однако, более целесообразно найти неподвижное сечение и от него строить эпюру углов закручивания.

Так как углы закручивания вала вычисляются по формуле

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{GJ_p} = \frac{\tau \cdot l}{GJ_p / W_p}, \quad (1.1)$$

то неподвижное сечение при статическом нагружении вала можно найти приравниванием площадей эпюры крутящих моментов слева и справа от сечения, деленной на жесткость при кручении, или эпюры напряжений, деленной на модуль сдвига и отношение момента инерции к моменту сопротивления сечения.

Пример 1.1. Сплошной вал ступенчато-переменного сечения загружен по схеме

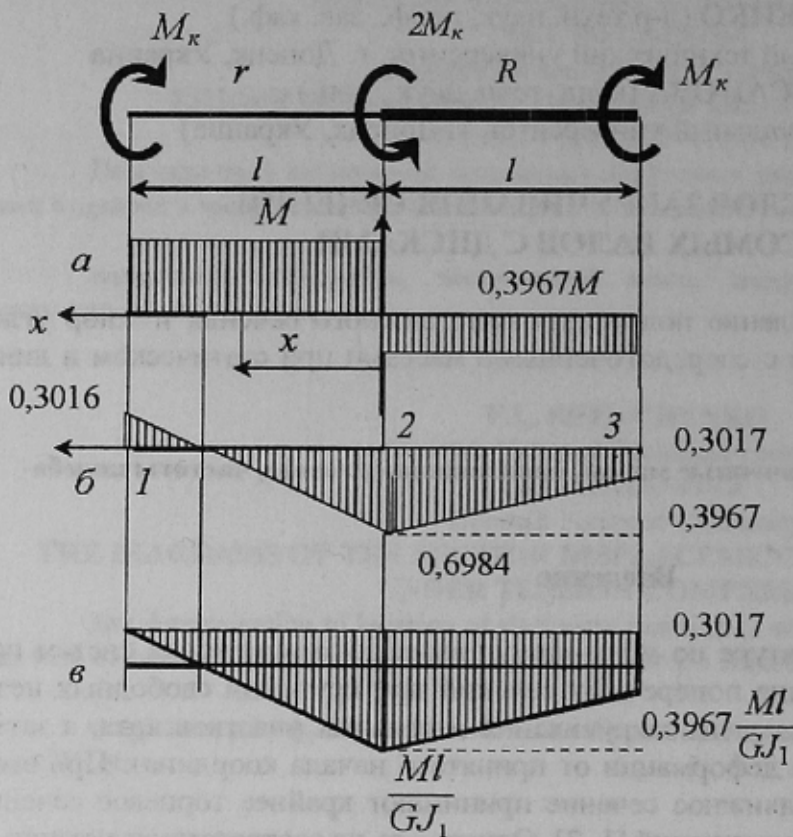


Рис. 1.1. Вал ступенчато переменной жесткости

Углы закручивания участков вала, рис. 1.1, б:

$$\varphi_1 = \frac{M(l-x)}{GJ_1} = 0,3016 \frac{Ml}{GJ_1}, \quad \varphi_2 = -\frac{Mx}{GJ} = -0,6984 \frac{Ml}{GJ_1},$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{Ml}{2GJ} = -0,6984 \cdot \frac{Ml}{GJ_1} + \frac{Ml}{2,5205GJ_1} = (-0,6984 + 0,3967) \frac{Ml}{GJ_1} = -0,3017 \frac{Ml}{GJ_1}, \text{ см.}$$

рис. 1.1, б.

Если принять за неподвижное сечение левый торец вала, то получим эпюру углов закручивания рис. 1.1, в (заштрихованное поле).

Смещая ось эпюры на половинное значение угла закручивания правого торца вала, получим истинную эпюру углов закручивания, рис. 1.1, в (показана жирной линией).

2. Динамическое нагружение вала

При динамическом нагружении вала неподвижные узловы сечения вала определяются частотами собственных крутильных колебаний невесомого вала [3].

Рассмотрим невесомый вал, т.е. вал, погонная масса которого равна нулю, на котором закреплен диск массой M с моментом инерции этой массы относительно оси вала J , рис. 1.2.

Для возбуждения собственных колебаний повернем диск на некоторый угол φ и отпустим.

рис. 1.2. Радиус вала на втором участке в 1,26 раза больше, чем на первом.

$$W_2 = \frac{\pi(1,26)^3 r^3}{2} = 2W_1,$$

$$J_2 = 2,5205J_1.$$

Для нахождения неподвижного сечения построим эпюру крутящих моментов, деленных на жесткость при кручении: на левом участке — $\frac{M}{GJ_1}$, на

правом — $\frac{M}{GJ_2} = 0,3967 \frac{M}{GJ_1}$,

(см. рис. 1.1, а). По этой эпюре находим неподвижное сечение, приравнявая площади слева и справа от сечения x ,

$M(x-l) = Mx - 0,3967Ml$,

откуда $x = 0,6983l$.

Из условия динамического равновесия мысленно отрезанного от вала диска с учетом момента сил инерции диска $-J\ddot{\varphi}$ и крутящего момента внутренних усилий $c\varphi$ получим дифференциальное уравнение крутильных колебаний

$$J\ddot{\varphi}(t) + c\varphi(t) = 0. \tag{2.1}$$

Здесь $c = \frac{GJ_p}{l}$ – коэффициент жесткости вала при кручении, равный крутящему моменту, вызывающему единичный угол закручивания.

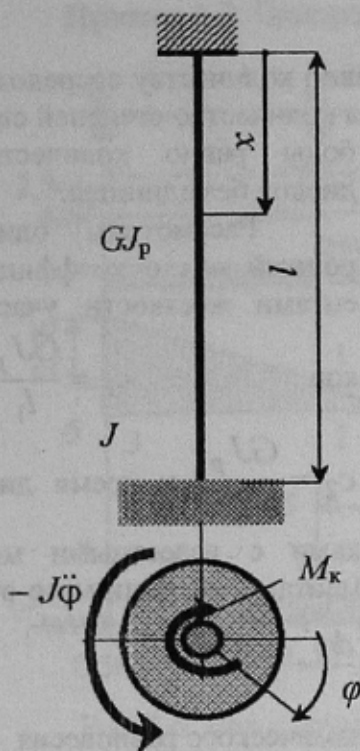


Рис. 1.3. К составлению дифференциального уравнения крутильных колебаний

Обозначив $\omega^2 = \frac{c}{J}$, из (2.1) получим

дифференциальное уравнение углов закручивания в месте закрепления диска

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega^2\varphi(t) = 0. \tag{2.2}$$

Решение этого уравнения известно в виде

$$\varphi(t) = A\sin(\omega t + \mu), \tag{2.3}$$

где амплитудный угол закручивания A и начальная фаза μ находятся из начальных условий $\varphi(0) = \varphi_0$ и $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$:

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega}\right)^2}, \quad \mu = \arctg \frac{\dot{\varphi}_0}{\varphi_0} \omega, \tag{2.4}$$

а циклическая частота свободных крутильных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{J}} = \sqrt{\frac{GJ_p}{lJ}} = \sqrt{\frac{1}{\varphi_{11}J}}. \tag{2.5}$$

Зная уравнение вращательных движений

сечений вала $\varphi(x, t) = \varphi(t) \frac{x}{l}$, легко най-

ти внутренний силовой фактор, т.е. крутящий момент внутренних усилий

$$M_k(x, t) = J\dot{\varphi}(x, t) = J\omega^2 A \frac{x}{l} \sin(\omega t + \mu). \tag{2.6}$$

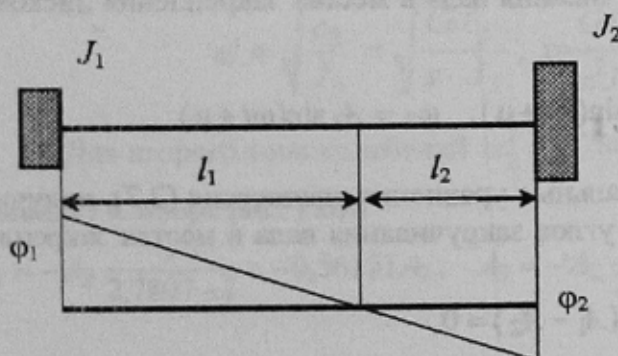


Рис.1.4. Узловое сечение вала с одной степенью свободы

Итак, наиболее важным параметром собственных колебаний вала является частота колебаний (2.5), зная которую можно вычислить расчетный крутящий момент (2.6) при заданных начальных условиях φ_0 и $\dot{\varphi}_0$.

По этой же формуле (2.5) вычисляется частота собственных колебаний свободного незакрепленного вала с двумя дисками, когда диски

при крутильных колебаниях вращаются в противоположные стороны и на валу образуется неподвижное сечение в узловой точке, разделяющей длину вала на два участка, обратно пропорциональные моментам инерции массы дисков (рис. 1.4). Здесь каждый участок можно рассматривать как жестко заземленный вал с общей частотой колебаний ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{GJ_p}{l_1 \cdot J_1}} = \sqrt{\frac{GJ_p}{l_2 \cdot J_2}}$$

Из этого равенства получаем $l_1 J_1 = l_2 J_2$ или $l_1 J_1 = (l - l_1) J_2$, откуда находим участки вала, разделенные узловым сечением, (рис. 1.4) [3]

$$l_1 = \frac{J_2}{J_1 + J_2} l, \quad l_2 = \frac{J_1}{J_1 + J_2} l.$$

Таким образом, количество степеней свободы вала равно количеству сосредоточенных дисков на валу с заземлением, а для свободного вала количество степеней свободы равно количеству дисков без единицы.

Рассмотрим однородный вал с коэффициентами жесткости участков

$$c_1 = \frac{GJ_p}{l_1},$$

$$c_2 = \frac{GJ_p}{l_2} \text{ и } \text{три} \text{ } \text{дис-}$$

ками с известными моментами инерции масс от-

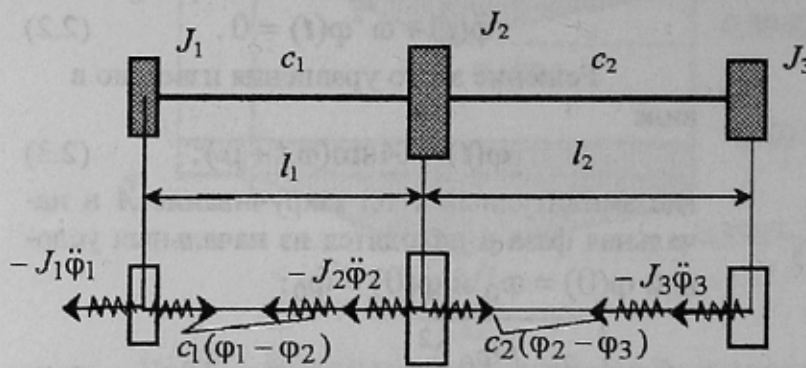


Рис. 1.5. Расчетная схема вала с двумя степенями свободы

$$\text{носительно оси вала } J_1 = \int_{M_1} \rho^2 dm, \quad J_2 = \int_{M_2} \rho^2 dm, \quad J_3 = \int_{M_3} \rho^2 dm$$

При свободных (собственных) колебаниях условия динамического равновесия мысленно отрезанных от вала дисков имеют вид, рис. 1.5:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_1(\varphi_1 - \varphi_2) + c_2(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0, \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 - c_2(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Представляя уравнения углов закручивания вала в местах закрепления дисков в виде гармонических функций

$$\varphi_1 = A_1 \sin(\omega t + \mu), \quad \varphi_2 = A_2 \sin(\omega t + \mu), \quad \varphi_3 = A_3 \sin(\omega t + \mu)$$

и подставляя эти уравнения в дифференциальные уравнения равновесия (2.7), получим систему однородных уравнений амплитуд углов закручивания вала в местах закрепления дисков:

$$\begin{aligned} J_1 \omega^2 A_1 - c_1(A_1 - A_2) &= 0, \\ J_2 \omega^2 A_2 + c_1(A_1 - A_2) - c_2(A_2 - A_3) &= 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$J_3\omega^2 A_3 + c_2(A_2 - A_3) = 0.$$

Из этих уравнений следуют зависимости:

$$J_1 A_1 + J_2 A_2 + J_3 A_3 = 0, \tag{2.9}$$

$$A_1 = -\frac{c_1 A_2}{J_1 \omega^2 - c_1}, \quad A_3 = -\frac{c_2 A_2}{J_3 \omega^2 - c_2}, \tag{2.10}$$

подставляя которые в (2.8), получаем биквадратное частотное уравнение [3]

$$\omega^4 \frac{J_1 \cdot J_2 \cdot J_3}{c_1 c_2} - \omega^2 \left[\frac{J_1}{c_1} (J_2 + J_3) + \frac{J_3}{c_2} (J_1 + J_2) \right] + (J_1 + J_2 + J_3) = 0, \tag{2.11}$$

Пример 1.2. Однородный невесомый упругий вал постоянной жесткости GJ_p с

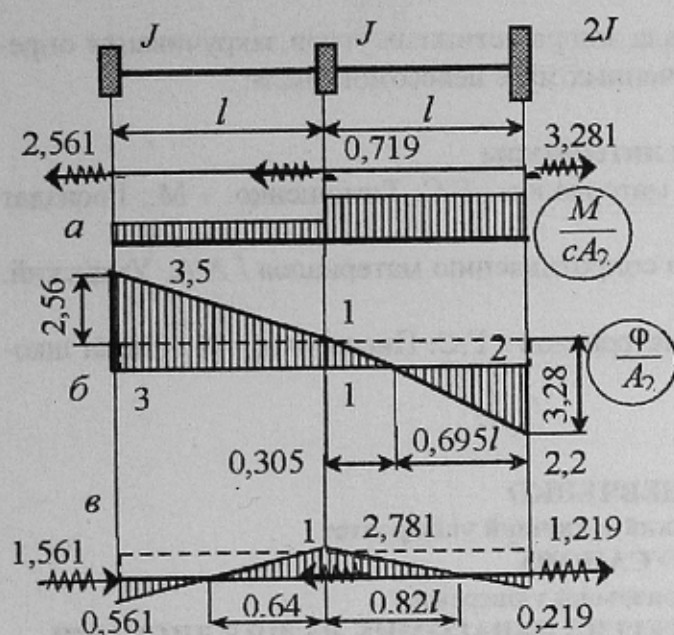


Рис. 1.6. Вал с двумя степенями

тремя дисками испытывает собственные крутильные колебания, рис. 1.6.

Из уравнения (2.11) находим частоты колебаний первого $\omega_1^2 = 0,7192 \frac{c}{J}$, и второго тона колебаний $\omega_2^2 = 2,7807 \frac{c}{J}$.

Амплитудные углы закручивания основного тона колебаний

$$A_1 = -A_2 \frac{1}{0,7192-1} = 3,561A_2,$$

$$A_3 = -A_2 \frac{1}{2 \cdot 0,7192-1} = -2,281A_2$$

и амплитудные крутящие моменты:

$$M_2 = J\omega_1^2 A_2 = 0,719cA_2,$$

$$M_1 = J\omega_1^2 A_1 = 0,719 \cdot 3,561cA_2 = 2,561cA_2,$$

$$M_3 = 2J\omega_1^2 A_3 = 2 \cdot 0,719 \cdot 2,281cA_2 = -3,281cA_2.$$

Положение узлового, т.е. неподвижного сечения можно найти из подобия треугольников эпюры углов закручивания или по формуле частоты крутильных колебаний участка вала справа от узлового сечения, где можно принять защемление вала длиной x , рис. 1.6, б

$$\omega = \sqrt{\frac{c_2}{J_3}} = \sqrt{\frac{GJ_p}{x \cdot J_3}}, \quad x = \frac{GJ_p}{\omega^2 J_3} = \frac{GJ_p}{0,7192 \cdot J_3} = \frac{J \cdot l}{0,7192J} = 0,695l.$$

Для второго тона колебаний $\omega_2^2 = 2,7807 \frac{c}{M}$. аналогичные вычисления

приводят к эпюре рис. 1.6, в:

$$A_1 = -A_2 \frac{1}{2,7807-1} = -0,56151A_2, \quad A_3 = -A_2 \frac{1}{2 \cdot 2,7807-1} = -0,21923A_2.$$

$$M_2 = J\omega_2^2 A_2 = 2,7807cA_2, \quad M_1 = J\omega_2^2 A_1 = -2,7807 \cdot 0,5615cA_2 = -1,5614cA_2,$$

$$M_3 = 2J\omega_2^2 A_3 = -2 \cdot 2,7807 \cdot 0,21923cA_2 = -1,2192cA_2,$$

Узлові точки також можна знайти по частоті другого тона коливань;

на лівому участку $x = \frac{GJ_p}{\omega^2 J_3} = \frac{J \cdot l}{2,7807 \cdot J} = 0,3596l$, на правому участку

$$x = \frac{J \cdot l}{2,7807 \cdot 2J} = 0,1798l.$$

Выводи

Істинна еюра перемещень сечень при статическом нагрудженні вала опре-
деляється из условия равновеликих площадей эюры крутящих моментов, деленных на
жесткость вала при кручении.

При динамическом нагрудженні вала эюра истинных углов закручивания опре-
деляється частотами коливань сосредоточенных масс невесомого вала.

Список литературы

1. Тимошенко Г.С. Сопротивление материалов / Г.С. Тимошенко. – М.: Госиздат физ.-мат. литер., 1960. – 380 с.
2. Уманский А.А. Сборник задач по сопротивлению материалов / А.А. Уманский. – М.: ГИТТЛ, 1954 – 480 с.
3. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко. – К.: Вища шко-
ла, 1985. – 775 с.

Ф.Л. ШЕВЧЕНКО

Донецкий национальный технический университет

О.А. РУСАНОВА

Донецкий национальный университет

ЕЮРИ КУТІВ ЗАКРУЧУВАННЯ ПЕРЕРІЗІВ НЕВАГОМИХ ВАЛІВ З ДИСКАМИ

Розглядається визначення положення нерухомих перерізів та еюр кутів закручування
невагомих валів з зосередженими масами при статичному та динамічному навантаженні

**невагомий вал, зосереджені маси, нерухомий переріз, частоти коливань, власні ко-
ливання**

F.L. SHEVCHENKO

Donetsk National Technical University

O.A. RUSANOVA

Donetsk National University

THE DIAGRAMS OF THE TORSION ANGLES OF WEIGHTLESS SHAFT WITH DISCUS

The determination location of stationary position of section displacement of weightless shafts
with concentrated mass under static and dynamic loads is considered.

**weightless shafts, concentrated mass, displacements section, vibration frequencies, natu-
ral vibration**

Рецензент: д.т.н., доц. Татяниченко О.Г.

Надійшла до редколегії 15.04.2010