УДК 621.9.06

Е.А. ЧЕРНЫШЕВ (канд. техн. наук)
В.И. ДВОРНИКОВ (д-р техн. наук, проф.)
К.С. ВОЛОСЕНКО (студ.)
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, Украина

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ СОКОЛОВСКОГО А.П. ПРИ РЕЗАНИИ МЕТАЛЛА

В статье выполнен анализ уравнения автоколебаний Соколовского А.П. при резании металла. Получены выводы о частоте колебаний при резании и зависимости амплитуды автоколебаний от скорости резания. Установлено, что в первом приближении нелинейная восстанавливающая сила не влияет на амплитуду.

автоколебания, частота, амплитуда, восстанавливающая сила, метод Ван-дер-Поля

Введение

Гипотеза об автоколебательном характере вибраций при резании была выдвинута в 1930-х гг. Н.А. Дроздовым [1], Н.С. Ачерканом, Г. Шлезингером: происхождение колебаний обусловлено не некоторой внешней вынуждающей силой, а свойствами самого процесса резания, который содержит источник энергии и регулирующий механизм, осуществляющий обратную связь с колебательной системой. Этим объясняется появление вибраций не только при совпадении частот, но и в достаточно широком диапазоне режимов резания. В дальнейшем эта гипотеза была поддержана А.И. Кашириным [2], А.П. Соколовским [3], И.И. Ильницким [4] и другими авторами.

Основной причиной автоколебаний при резании считается разница работ при врезании и отталкивании инструмента, что отражает сам факт наличия колебаний, но не устанавливает происхождения этой разницы. В силу множества факторов, действующих при резании, аналитическое описание автоколебаний весьма затруднительно, поэтому в той или иной степени используют эмпирические модели, в частности для определения силы резания. В работах [2, 4] переменная сила резания представлялась как сумма переменных сил, имеющих вполне определенную природу, - в зависимости от скорости трения по граням, от изменения углов резца, от изменения мгновенных режимов и т.д. Однако для каждой составляющей также надлежит знать соответствующую эмпирическую зависимость, поэтому данный метод не получил дальнейшего развития.

А.П. Соколовским было предложено упрощенное уравнение автоколебаний, исходя из общего физического представления колебательной системы при резании, хотя на тот момент его аналитическое исследование представляло значительные трудности. Тем не менее была найдена зависимость амплитуд автоколебаний от скорости резания, которая в общих чертах согласуется с опытными данными. В дальнейшем Л.К. Кучмой эта зависимость была уточнена путем введения в уравнение нелинейного квадратичного члена.

В данной работе взято за основу уравнение автоколебаний А.П. Соколовского, которое было подвергнуто сравнительному анализу с целью определить более рациональную форму уравнения, согласующегося с опытными данными.

Основное содержание и результаты работы

Уравнение автоколебаний (в радиальном направлении) А.П. Соколовского [3] основано на следующем эмпирическом представлении силы резания:

$$P_y = R - ry + aB\frac{\dot{y}}{V} - cB\frac{\dot{y}^3}{V^3}, \qquad (1)$$

где R – постоянная величина силы резания; r – член, выражающий зависимость силы от радиальных колебаний; B – действительная ширина режущей кромки; V – скорость резания; $\dot{y}$ – скорость радиальных колебаний; a, c – некоторые постоянные величины.

По физическому смыслу a, c являются коэффициентами жесткости третьей и четвертой составляющих сил в уравнении (1) – соответственно силы, возбуждающей колебания, и силы, ограничивающей колебания, когда их скорость превышает некоторое критическое значение.

Уравнение автоколебаний на основе (1) имеет вид

$$m\ddot{y} + \left(h - \frac{aB}{V}\right)\dot{y} + (k + r)y + cB\frac{\dot{y}^3}{V^3} = 0, \qquad (2)$$

где m – приведенная масса колеблющейся системы, h – коэффициент рассеивания энергии, k – коэффициент жесткости.

Коэффициент r, выражающий зависимость силы от радиальных колебаний может быть представлен как коэффициент разложения в ряд Маклорена радиальной силы $K(t_0 - y)^n$, где K, n – постоянные величины, зависящие от условий обработки, t_0 – номинальная, а $(t_0 - y)$ – фактическая глубина резания. Ограничиваясь разложением до линейного члена,

$$K(t_0 - y)^n = K\left[t_0^{\,n} - n t_0^{\,n-1} y\right] = R - ry,$$

где $R = K t_0^{\,n}$, $r = K n t_0^{\,n-1}$, причем r представляет собой условную «жесткость» процесса резания и вместе с исходной жесткостью k составляет обобщенную жесткость, определяющую частоту колебаний при резании, равную

$$\omega = \sqrt{\frac{k + r}{m}}, \qquad (3)$$

что также было получено А.П. Соколовским.

Зависимость (3) можно получить, аналитически решив уравнение

$$m\ddot{y} + ky = K(t_0 - y)^n,$$

т.е. без диссипативного члена. Оно интегрируется в квадратурах. В частности, оно имеет первый интеграл

$$\frac{m\dot{y}^2}{2} + \Pi(y) = E,$$

являющийся интегралом сохранения полной энергии E, где потенциальная энергия системы

$$\Pi(y)=\frac{ky^2}{2}+\frac{K}{n+1}(t_0-y)^{n+1},$$

откуда следует, что

$$dt=\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-\Pi(y)\right]}}, \qquad (4)$$

и, следовательно,

$$t=\int\frac{dy}{\sqrt{a_0+a_1y+a_2y^2}}+C, \qquad (5)$$

где C – постоянная интегрирования, а квадратный трехчлен является разложением подкоренного выражения в (4) в ряд Тейлора в окрестности точки равновесия. Коэффициенты разложения определяются так:

$$a_0=\frac{2}{m}\left[E-\frac{K}{n+1}(t_0-y^*)^{n+1}-K(t_0-y^*)^n y^*-Kn(t_0-y^*)^{n-1}(y^*)^2\right],$$

$$a_1=\frac{2}{m}\left[K(t_0-y^*)^n-2Kn(t_0-y^*)^{n-1}y^*\right],$$

$$a_2=-\frac{1}{m}\left[k+Kn(t_0-y^*)^{n-1}\right],$$

где координата y^* точки равновесия в силу своей малости может быть принята равной нулю. Постоянная интегрирования C является некоторым начальным моментом времени, которую без потери общности положим $C=0$. Заметим, что в силу условий

$$a_2<0,\quad 4a_0a_2-a_1^2<0,$$

в чем можно убедиться прямым расчетом для практически осуществимых значений входящих в них параметров, интеграл (5) имеет аналитическое решение

$$t=-\frac{1}{\sqrt{-a_2}}\arcsin\left(\frac{2a_2y+a_1}{\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}\right),$$

откуда, используя обращение арксинуса, получим

$$y=\frac{\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}\,\sin\left(-t\sqrt{-a_2}\right)-a_1}{2a_2}.$$

Обозначив

$$A=\frac{\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_2},\quad \nu=\sqrt{-a_2},\quad y_0=-\frac{a_1}{2a_2},$$

где A – амплитуда, ν – циклическая частота, y_0 – некоторая постоянная величина, получим окончательное решение в виде

$$y = A\cos\left(\nu t + \frac{\pi}{2}\right) + y_0. \qquad (6)$$

Таким образом, с точностью до квадратичного члена в разложении потенциальной энергии, радиальные колебания системы с одной степенью свободы описываются синусоидой (6). Можно заметить, что частота ν, если положить $y^* = 0$, в точности совпадает с (3). Строго говоря, координата точки равновесия определяется из алгебраического уравнения

$$ky - K(h_0 - y)^n = 0,$$

однако его численное решение подтверждает правомерность допущения $y^* = 0$.

Можно оценить точность выражения (3) путем сравнения с экспериментом. Постоянная $K = 2{,}13 \cdot 10^5$ получена при следующих данных: предел прочности 750 МПа, радиус при вершине резца 1 мм, $\gamma = 10^\circ$, $\varphi = 45^\circ$, $\lambda = 0^\circ$. Пусть угловая скорость вращения заготовки 100 рад/с, а режимы обработки V = 2 м/с, $s = 0{,}0006$ м, т.е. 0.6 мм/об. При заданной угловой скорости это соответствует диаметру заготовки 40 мм. Зададимся также, что $l_0 = 0{,}001$ м, $k = 5 \cdot 10^6$ Н/м, $n = 0{,}9$.

На рис. 1 представлен теоретический график зависимости частоты колебаний от глубины резания в соответствии с (3). Полученные теоретические результаты не противоречат экспериментальным данным. Так, по данным А.И. Каширина [2], с увеличением глубины резания частота колебаний немного снижается, хотя это уменьшение столь незначительно, что им можно пренебречь и считать частоту не зависящей от глубины. Этот известный экспериментальный факт в данном случае можно теоретически объяснить. В соответствии с (3), частота колебаний изменяется вследствие влияния глубины резания на r. Слабое изменение частоты от глубины резания объясняется тем, что добавка r мала в сравнении с жесткостью k и ее изменение практически не оказывает влияния на частоту, хотя с увеличением глубины добавка, а с ней и частота колебаний, незначительно уменьшается (рис. 1). Согласуется с данными всех авторов тот факт, что частота при резании близка к собственной частоте, в данном случае равной 113 Гц. Таким образом, представление А.П. Соколовского в этой части не противоречит опыту.

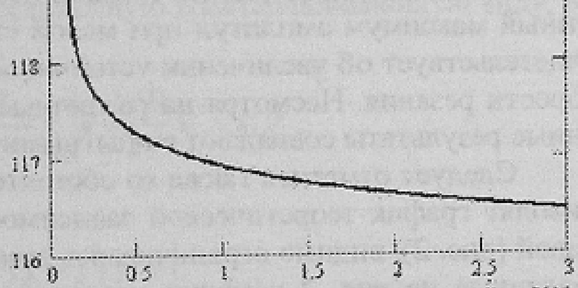

Рис. 1. Теоретический график зависимости от глубины резания частоты колебаний

Рассмотрим влияние скорости резания на амплитуды. А.П. Соколовским была получена следующая зависимость амплитуд автоколебаний от скорости:

$$A = \frac{2}{\sqrt{3c}} \frac{V}{\omega} \sqrt{a - \frac{Vh}{B}}, \qquad (7)$$

выведенная, как необходимо предположить, методом Ван-дер-Поля из условия стационарной амплитуды

$$\frac{dA}{dt} = \frac{-1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_1(-A\omega\sin\psi)\sin\psi\, d\psi = 0. \tag{8}$$

где

$$f_1(\dot{y}) = \left(\frac{aB}{V} - h\right)\dot{y} - \frac{cB}{V^3}\dot{y}^3.$$

Уравнение (7) отражает факт роста амплитуд с увеличением скорости и их уменьшения до нуля при $V = aB/h$. Эта теоретическая зависимость показана на рис. 2 вместе с приближенной экспериментальной кривой.

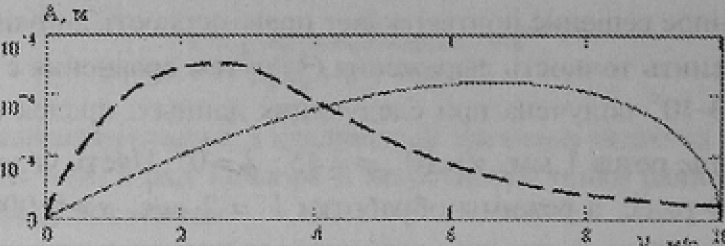

Рис. 2. Теоретическая по (7) и приближенная экспериментальная (пунктиром) зависимость амплитуд колебаний от скорости резания
($h = 100$ Нс/м, $\omega = 1000$ рад/с, $B = 0{,}001$ м, $a = 10^6$ Н/м, $c = 10^8$ Н/м)

Основное отличие от опытной кривой состоит в том, что максимум «размыт» и смещен вправо. Похожая зависимость была получена и теоретически для модели ортогонального резания с двумя степенями свободы [5, 6]. В работе [7] полученная теоретическая кривая не совпадает ни с одной из изображенных на рис. 2 и имеет резко выраженный максимум амплитуд при малой скорости. В работе [8] теоретический график свидетельствует об увеличении устойчивости при превышении некоторой критической скорости резания. Несмотря на различные подходы авторов, в основных чертах полученные результаты совпадают с опытными данными.

Следует отметить также то обстоятельство, что А.П. Соколовский и Л.К. Кучма приводят график теоретической зависимости (7), совпадающий с экспериментальной кривой (рис. 2), видимо ограничиваясь лишь его качественным анализом. Однако представленные на рис. 2 графики свидетельствуют о некотором расхождении теории с опытом – это касается более резкого возрастания и более плавного падения кривой амплитуд.

В связи с этим расхождением был предпринят ряд попыток найти такую форму уравнения колебаний при резании, которая давала бы более близкую к эксперименту зависимость амплитуды от скорости $A(V)$ и имела ясный физический смысл. Поскольку основой аналитических поисков было уравнение Ван-дер-Поля (8), то задача заключалась в подборе соответствующей функции $f(y, \dot{y})$. Иными словами, необходимо было найти эту функцию таким образом, чтобы в первом приближении (Ван-дер-Поля) зависимость $A(V)$ была более близка к экспериментальной.

Основное внимание было направлено на подбор диссипативного члена, который отражал бы уменьшение и затем плавное увеличение диссипации в зависимости от скорости. Это явление имеет место при трении и, как считается, является одной из причин автоколебаний при резании, когда при некоторой скорости резания сила трения стружки о резец наименьшая, а амплитуда – наибольшая. Несмотря на то, что подобрать подобную функцию не составляет большого труда, все попытки дали отрицательный результат. Не было найдено никакой другой формы уравнения, которая давала бы более точную зависимость $A(V)$. По этой причине мы не приводим промежуточные выкладки и ограничимся упоминанием, что взятие интеграла (8) и решение полученного алгебраического уравнения относительно A приводит к тому, что либо зависимость $A(V)$ не точнее (7), либо решение получается очень громоздким и практически непригодным.

На этом основании считаем, что уравнение А.П. Соколовского является наиболее рациональным с точки зрения получающейся зависимости амплитуды от скорости, даже несмотря на то, что оно дает несколько отличающееся от опытных данных решение.

Рассмотрим еще одно свойство, математически вытекающее из первого приближения и имеющее физический смысл «ограничителя» колебаний. А.П. Соколовским в качестве ограничителя был постулирован нелинейный диссипативный член $cB\dot{y}^3/V^3$, который означает усиление затухания при увеличении скорости колебаний, т.е. по достижении некоторой критической скорости эта сила превышает возбуждающую $(aB/V-h)\dot{y}$ и колебания затухают. Однако известно также, что при увеличении амплитуд возникающие деформации отклоняются от закона Гука, вызывая нелинейную силу упругости k_1y^3, которая свидетельствует о резком возрастании восстанавливающей силы. Поставим вопрос: может ли нелинейная сила упругости при больших амплитудах ограничивать колебания? Иными словами, не является ли регулирующим механизмом и причиной автоколебаний, наряду с зависимостью диссипации от скорости, и нелинейная восстанавливающая сила при больших амплитудах.

Перепишем уравнение (2), добавив нелинейную восстанавливающую силу, в виде

$$m\ddot{y}+(k+r)y=\left(\frac{aB}{V}-h\right)\dot{y}-\frac{cB}{V^3}\dot{y}^3-k_1y^3, \tag{9}$$

или

$$m\ddot{y}+(k+r)y=f(y,\dot{y}), \tag{10}$$

т.е. содержащее отрицательную силу k_1y^3, возрастающую при больших перемещениях. Чтобы установить влияние этой силы на амплитуду, обратимся к первому приближению Ван-дер-Поля, имея в виду нулевое приближение $A\cos\psi$. Условие стационарной амплитуды A установившихся колебаний состоит в том, что

$$\frac{dA}{dt}=\frac{-1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi,-A\omega\sin\psi)\sin\psi\, d\psi=0,$$

где, в соответствии с (9), (10),

$$f(y,\dot{y})=f_1(\dot{y})-k_1y^3.$$

Таким образом,

$$\frac{-1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f\left(A\cos\psi, -A\omega\sin\psi\right)\sin\psi\, d\psi = \frac{-1}{2\pi\omega}\left(\int_0^{2\pi} f_1(\dot{y})\sin\psi\, d\psi - \int_0^{2\pi} k_1 y^3 \sin\psi\, d\psi\right),$$

т.е. влияние нелинейной восстанавливающей силы в первом приближении описывается добавлением интеграла

$$\int_0^{2\pi} k_1 y^3 \sin\psi\, d\psi = \int_0^{2\pi} k_1\left(A\cos\psi\right)^3 \sin\psi\, d\psi\,. \qquad (11)$$

Но интеграл (11) равен нулю, из чего следует, что в первом приближении нелинейная восстанавливающая сила не влияет на амплитуду колебаний. Поэтому основным регулирующим фактором, способствующим возникновению автоколебаний при резании, является зависимость диссипации от скорости, выражающаяся, как предполагается, в зависимости силы трения по граням резца от скорости скольжения. Таким образом, причиной автоколебаний не является увеличение амплитуды до некоторого установившегося значения. Основное значение имеет скорость вибраций в окрестности некоторой скорости, при которой трение стружки о резец минимально. Такой вывод следует из анализа уравнения автоколебаний методом Ван-дер-Поля, и он не противоречит основной гипотезе о причине автоколебаний при резании [2-4].

Заключение

На основании анализа уравнения автоколебаний при резании А.П. Соколовского получены следующие выводы:

1. Частота колебаний при резании близка к собственной частоте, т.к. «жесткость» процесса резания мала по сравнению со статической жесткостью системы. Этот результат не противоречит экспериментальным данным.

2. Зависимость амплитуды от скорости резания не совпадает точно с экспериментальной кривой, однако не удается подобрать такую форму уравнения, которая дала бы более близкий к опыту результат.

3. В первом приближении нелинейная восстанавливающая сила не влияет на амплитуду колебаний. Причиной автоколебаний, как следует из анализа уравнения, является не увеличение амплитуды до некоторого установившегося значения, а наличие такой скорости вибраций, при которой трение стружки о резец минимально. Это способствует установлению колебаний со скоростью в окрестности этого значения.

Список литературы

1. Дроздов Н.А. К вопросу о вибрациях при токарной обработке / Н.А. Дроздов // Станки и инструмент. – 1937. – С. 10 – 17.

2. Каширин А.И. Исследование вибраций при резании металла / А.И. Каширин. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1944. – 133 с.

3. Соколовский А.П. Вибрации при работе на металлорежущих станках / А.П. Соколовский // Исслед. колебаний металлорежущих станков при резании металлов: сб. тр. – М.: Машгиз, 1958. – 120 с.

4. Ильницкий И.И. Колебания в металлорежущих станках и пути их устранения / И.И. Ильницкий. – М.-Свердловск: Машгиз, 1958. – 144 с.

5. Шишкин А.В. О задаче аналитического определения безвибрационных режимов резания с использованием линий бифуркации / А.В. Шишкин, А.А. Сердюк // Східно-Європейський журнал передових технологій. – Х., 2007. – №2/4 (26). – С. 28–33.

6. Шишкин А.В. Моделирование вибрационных характеристик резания в плоскости бифуркационных параметров режимов резания / А.В. Шишкин, А.А. Сердюк // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії. – 2007. – № 2Е (10). – С. 187–194.

7. Кабалдин Ю.Г. Синергетика. Нелинейная динамика в технологических системах обработки резанием / Ю.Г. Кабалдин // Вестник машиностроения. – 2001. – № 12. – С. 49 – 58.

8. Кабалдин Ю.Г. Математическое моделирование динамической устойчивости системы резания в виде нелинейного осциллятора с разрывными характеристиками / Ю.Г. Кабалдин, С.В. Биленко, П.А. Саблин // Вестник машиностроения. – 2006. – № 10. – С. 35 – 43.

Є.О. ЧЕРНИШЕВ
В.І. ДВОРНИКОВ
К.С. ВОЛОСЕНКО
Донецький національний технічний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНЯННЯ АВТОКОЛИВАНЬ СОКОЛОВСЬКОГО А.П. ПРИ РІЗАННІ МЕТАЛУ

У статті виконано аналіз рівняння автоколивань Соколовського А.П. при різанні металу. Отримано висновки щодо частоти коливань при різанні та залежності амплітуд автоколивань від швидкості різання. Встановлено, що у першому наближенні нелінійна відновлююча сила не впливає на амплітуду.

автоколивання, частота, амплітуда, відновлююча сила, метод Ван-дер-Поля

E.A. CHERNYSHEV
V.I. DVORNIKOV
K.S. VOLOSENKO
Donetsk National Technical University

INVESTIGATING A.P. SOKOLOVSKY'S EQUATION OF SELF-OSCILLATIONS IN METAL CUTTING

The paper presents analysis of A.P. Sokolovsky equation of self-oscillations in metal cutting. The conclusions about cutting frequency and self-oscillations amplitudes are obtained. It has been determined that nonlinear resilient force does not influence self-oscillations amplitude.

self-oscillations, frequency, amplitude, resilience force, Van-der-Paul method

Надійшла до редколегії 02.03.2010