ЗАДАЧИ О ПОТОКАХ В СЕТИ ПРИ НЕЧЕТКИХ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Тыщук Р.В.
НПП «АМИ», отдел информационных технологий, Донецк, Украина
E-mail: rt_science@hotmail.com

Abstract
Tyshchuk R.V. Network flow tasks under the fuzzy input data. *The network flow systems are described. The main features of the solving the network flow tasks under uncertainty are defined and the fuzzy network flow system model is proposed to solve this problem. The classification of fuzzy network systems is shown and the main characteristics and soft constraints are represented .The possibilities of represented of non probability uncertainty by this models is demonstrated.*

Потоковые системы

Потоковая сеть *N* есть связный ориентированный граф, не имеющий петель и удовлетворяющий следующим условиям [1]:

- существует как минимум одна вершина с нулевой полустепенью захода; эта вершина называется источником и обозначается через *S;*
- существует как минимум одна вершина с нулевой полустепенью исхода; эта вершина называется стоком и обозначается через *T*.

Каждому ребру *e=(i,j)* сопоставлено неотрицательное вещественное число, называемое пропускной способностью ребра; оно обозначается через *c(e)* или *c(i,j)*. Если ребра *e* не существует, то полагается *c(e)=0*.

Потоком в сети *N* является функция, сопоставляющая каждому ребру *e=(i,j)* неотрицательное вещественное число *f(e)=f(i,j)* так, что удовлетворяются следующие условия:

$$0 \le f(i,j) \le c(i,j), \forall (i,j) \in E \quad (1)$$

$$\sum_j f(i,j) = \sum_j f(j,i), \forall i \ne S, T \quad (2)$$

Условие (1), называемое ограничением по пропускной способности, требует, чтобы скорость потока вдоль ребра не превосходила пропускной способности ребра. Условие (2), называемое условием сохранения, требует, чтобы для каждой вершины *i*, исключая источник и сток, скорость, с которой материал доставляется в *i*, была бы равна скорости, с которой он удаляется из *i*.

Величина потока *f*, обозначаемая через *F*, определяется выражением

$$F = \sum_j f(S,j) \quad (3)$$

При анализе систем потоков их можно разбить на два класса: системы с регулярными и нерегулярными потоками [2]. К первому классу относятся системы, в которых величина потока точно известна и является постоянной на исследуемом интервале времени. Основной задачей теории сетевых потоков является задача отыскания максимального потока, распространяющегося по сети каналов. Для ее решения существует классический алгоритм маркировки, основанный на поэтапном отыскании увеличивающих потоков в сети [3]. Кроме задачи о максимальном потоке, существует еще целый ряд задач о потоках в сетях [4,5,6]. Так, при назначении цены каждому каналу, возникает задача о построении сети минимальной стоимости, обеспечивающей данный поток. Подобные задачи ставятся и на сетях, в которых имеется не только одна начальная и конечная вершина. Более сложные задачи требуют прохождения по сети потоков различных типов. Вторым классом, который можно выделить в системах потоков, является класс случайных потоков. Под этим подразумевается, что время поступления потока в систему или ее элемент не определено или непредсказуемо, как не определена и величина потока, поступающего в систему.

Особенности задач о потоках в сети при нечетких исходных данных

Теория сетевых потоков применяется при разработке множества моделей решения практических задач. Однако на практике общие представления о мире и о процессах, происходящих в нем, определены не достаточно точно. Основные причины возникновения нечеткости при определении потоков, пропускных способностей и стоимостных характеристик в сетях можно описать следующим образом:

- во время определения характеристик сети могу возникать ошибки;
- иногда характеристики сети могут быть определены только в рамках некоторых диапазонов из-за разброса значений или невозможности получения точной информации. Кроме того, сетевые характеристики могут колебаться в течение времени;
- при определении стоимостных характеристик сети возникает целый ряд неопределенностей, связанных с субъективностью информации, предпочтениями, невозможностью точно определить расходы на построение и эксплуатацию сети;
- при решении задач синтеза потоковых систем аналогичный ряд неопределённостей возникает при определении сетевой топологии и параметров сети.

Подобные виды неопределенностей не всегда корректно моделируются существующими методами решения потоковых задач [7]. Так, детерминированные модели не способны отображать изменчивость параметров, наблюдаемую в большинстве потоковых систем. Такие модели могут быть использованы только для исследования наилучших и наихудших случаев, в которых каждый неточно определенный параметр заменяется одним из своих крайних значений.

При использовании вероятностных моделей [8] одним из серьезных ограничений является выбор распределений параметров модели, который оказывает влияние на конечные результаты моделирования и требует проведения дополнительных исследований чувствительности. Кроме того, вероятностные модели могут быть использованы только при моделировании неопределённостей, связанных со случайностью исследуемых процессов, и не позволяют учесть неопределенности, связанные с неточностью и сложностью информации, анализом ограничений, субъективностью информации и пр. Таким образом, для решения сетевых потоковых задач в условиях нечетких исходных данных необходимо применять модели, позволяющие учитывать указанные виды неопределенности.

Нечеткие модели

1 Способы задания нечетких сетевых моделей

Существует несколько способов описания нечетких сетевых моделей с помощью нечетких графов [9]. Классифицируя виды задания нечеткой сетевой модели, можно выделить следующие типы нечетких сетей:

1. Нечеткое множество четких сетевых моделей. Тривиальный тип задания нечеткой сетевой модели, состоящий из рассмотрения нечеткого множества G четких сетевых моделей G_l:

$$G = G_1 \setminus \mu_1 + G_2 \setminus \mu_2 + \ldots + G_{n_G} \setminus \mu_{n_G} \tag{4}$$

2. Четкое множество узлов и нечеткое множество ребер. Данный вариант используется в случае, когда для сети известны узлы, но не известны ребра. В этом случае множество узлов – четкое, а множество ребер – нечеткое:

$$V = \{v_1, v_2, ..., v_{n_v}\} \quad (5)$$

$$E = e_1 \setminus \mu_1 + e_2 \setminus \mu_2 + ... + e_{n_E} \setminus \mu_{n_E} \quad (6)$$

где каждое ребро e_k - четкое, т.е. имеет фиксированное начало, конец и вес.

3. Четкие множества узлов и ребер сети с нечеткой связностью. В данном случае множество узлов и множество ребер – четкие, но сами ребра имеют нечеткие начало и конец:

$$V = \{v_1, v_2, ..., v_{n_v}\} \quad (7)$$

$$E = \{e_1, e_2, ..., e_{n_E}\} \quad (8)$$

$$h_k = h_{k,1} \setminus \sigma_{k,1} + h_{k,2} \setminus \sigma_{k,2} + ... + h_{k,n_v} \setminus \sigma_{k,n_v} \text{ для } k=1,\ldots,n_E \quad (9)$$

$$t_k = t_{k,1} \setminus \tau_{k,1} + t_{k,2} \setminus \tau_{k,2} + ... + t_{k,n_v} \setminus \tau_{k,n_v} \text{ для } k=1,\ldots,n_E \quad (10)$$

4. Нечеткое множество узлов и четкое множество ребер. В этом случае сеть имеет неопределенные узлы и четкие ребра, множество узлов – нечеткое, а множество ребер – четкое:

$$V = v_1 \setminus \mu_1 + v_2 \setminus \mu_2 + ... + v_{n_v} \setminus \mu_{n_v} \quad (11)$$

$$E = \{e_1, e_2, ..., e_{n_E}\} \quad (12)$$

Формулы (11-12) требуют корректной интерпретации, так как ребра в сети не могут существовать, если для них соответствующие узлы-начала и узлы-концы не существуют. При этом множество ребер определяется как четкое, даже если оно зависит от нечетких узлов.

5. Четкая сетевая модель с нечеткими весами. Данный вид нечеткости сети имеет четко определенные узлы и ребра и неопределенные веса (пропускные способности) ребер. Таким образом, только веса ребер представляются нечеткими числами:

$$w_k = w_{k,1} \setminus \mu_{k,1} + w_{k,2} \setminus \mu_{k,2} + ... + w_{k,n_v} \setminus \mu_{k,n_v} \quad (13)$$

2 Характеристики нечетких сетевых потоковых моделей

Существует несколько подходов к определению основных характеристик нечетких потоковых сетей, таких как поток, минимальный разрез и др. [9,10]

Один из этих подходов основывается на формировании множества, состоящего из всех возможных четких значений данной характеристики, и последующего сопоставления значения функции принадлежности данной характеристике как максимума из значений функции принадлежности четких величин – элементов данного множества. Согласно данному подходу нечеткое значение потока определяется как нечеткое число с функцией принадлежности, выраженной следующим образом:

$$\lambda = \max_{F \in \Phi}(\min_{e_k \in G}(\mu(f(e_k)))), \quad (14)$$

где Ф - множество всех четких потоков из источника в сток сети *G*.

Нечеткое значение минимального разреза при данном подходе определяется абсолютно аналогично.

Второй подход, предложенный [10], состоит в представлении нечеткого потока множеством интервальных потоков на каждом α–уровне, которые в свою очередь представляются двумя четкими потоками, соответствующими верхней и нижней границе интервала. Таким образом, согласно [10] нечеткий поток есть функция, представимая нечетким числом, определенная на множестве *E* в нечеткой сети *G* так, что:

$$0 \le \tilde{f}(e) \le \tilde{c}(e); \tag{15}$$

причем

$$\begin{cases} 0 \le f_i^R(e) \le c_i^R(e), \\ 0 \le f_i^L(e) \le c_i^L(e), \end{cases} \tag{16}$$

где i – номер соответствующего α–уровня, L – индекс, определяющий нижнюю границу интервала на i-м α–уровне, R – индекс, определяющий верхнюю границу интервала на i-м α–уровне;

$$\sum_j \tilde{f}(i,j) = \sum_j \tilde{f}(j,i), \forall i \ne S, T \tag{17}$$

Определение минимального разреза при данном подходе аналогично определению минимального разреза в четкой потоковой сети.

3 Построение ограничений в нечетких сетевых потоковых моделях

Одной из основных проблем при решении потоковых сетевых задач в условиях нечетких исходных данных является необходимость определения адекватного аналога ограничения по пропускной способности (1). В связи с этим возникает задача определения соответствующего (1) аналога для нечетких потоковых сетей, предоставляющего возможность корректного сравнения двух нечетких величин.

Существуют множество методов упорядочивания нечетких чисел для определения операции сравнения [11], среди которых можно выделить следующие: первый подход состоит в определении функции упорядочивания, проецирующей каждое нечеткое число на ось вещественных чисел, на которой существует общий порядок сравнения. Другой подход предполагает, что лицо, принимающее решение, априори выбирает степень соответствия, для которой неравенство может быть принято за истину непосредственно для лица, принимающего решение. Как пример второго подхода Дюбуа и Прадом были предложены четыре различных варианта описания относительной позиции двух нечетких чисел с точки зрения теории возможности [12], а также ими были предложены операции «нечеткий максимум» и «нечеткий минимум» [13]

При применении метода сравнения нечетких чисел, основанного на выборе априорно критерия сравнения, результатом операции максимума или минимума будет одно из сравниваемых нечетких чисел. При применении же метода сравнения нечетких чисел, основанного на операциях «нечеткого максимума» и «нечеткого минимума», максимум (минимум) из *n* нечетких чисел $\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n\}$, обозначаемый как $\max\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n\}$, будет также нечетким числом, однако $\max\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n\}$ не обязательно будет одним из нечетких чисел $\tilde{a}_i$ и может быть построен из частей разных $\tilde{a}_i$.

Базируясь на основе интегральных показателей сравнения нечетких величин можно определить следующие два варианта ограничений по пропускной способности:

1. Первый вариант определяет необходимость того факта, что наименьшие значения пропускной способности $\tilde{c}(e)$ будут больше, чем наибольшие значения потока $\tilde{f}(e)$ $(Nec(\underline{c} > \overline{f}) = 1)$.

2. Второй вариант определяется следующими тремя условиями:

- определение необходимости того факта, что наименьшие значения пропускной способности $\tilde{c}(e)$ будут не меньше наименьших значений потока $\tilde{f}(e)$ $(Nec(\underline{c} \ge \underline{f}) = 1)$.
- допущение возможности того факта, что наибольшие значения потока $\tilde{f}(e)$ будут не меньше наименьших значений пропускной способности $\tilde{c}(e)$ $(0 \le Pos(\overline{f} > \underline{c}) \le 1)$.
- исключение возможности того факта, что наибольшие значения потока $\tilde{f}(e)$ будут больше, чем наибольшие значения пропускной способности $\tilde{c}(e)$ $(Pos(\overline{f} > \overline{c}) = 0)$.

При этом необходимо заметить, что использование первого варианта ограничений по пропускной способности приведет к детерминированному варианту сетевой потоковой модели, в которой степень размытости нечеткого числа $\tilde{f}(e)$ уменьшится до нуля, а $\tilde{c}(e)$ станет $\underline{c}$.

4 Возможности применения нечетких сетевых потоковых моделей.

1. Представление исходной информации. Теория нечетких множеств предоставляет удобный инструмент представления исходных данных в виде нечетких величин. Нечеткие величины в моделях нечетких сетевых потоковых систем могут применяться для моделирования исходных данных, значения которых неточно известны, значения которых зависят от предпочтений и на момент моделирования не определены, лингвистических оценок. Среди форм представления нечетких величин можно выделить представление в виде набора α–уровней:

$$\tilde{V} = \{v_\alpha \,|\, \forall v \in v_\alpha : \mu_{\tilde{V}}(v) \ge \alpha\}, \tag{18}$$

где $v_\alpha = [v_{\alpha*}, v_\alpha^{\ *}]$ - α–уровень нечеткой величины V, $v_{\alpha*}$ - левая граница α–уровня v_α, $v_\alpha^{\ *}$ - правая граница α–уровня v_α.

Это позволяет задавать значения характеристик нечетких сетевых потоковых моделей в виде набора интервалов с учетом возможности попадания значения характеристики в этот интервал.

2. Определение ограничений. Особенностью нечетких множеств является способ их интерпретации в терминах предпочтений, что позволяет их использовать для представления нечетких ограничений. Большинство задач о потоке в сети являются оптимизационными, а использование нечетких величин для представления нечетких ограничений непосредственно связано с нечеткой оптимизацией. Кроме этого, теория нечетких множеств позволяет обрабатывать одновременно как неопределенность значений исходных данных, так и неопределенность целей и ограничений, что является особенностью нечетких сетевых потоковых моделей.

3. Расчет выходных параметров. Обработка информации в сетевых потоковых моделях, в которых исходные данные представлены нечеткими величинами, производится на основе принципов расширения обычных операций для нечетких

чисел. Путем применения принципа расширения к некоторой операции или математическому методу на основе нечетких величин входных параметров можно получить нечеткие величины, соответствующие выходным характеристикам. Методы, основанные на использовании мягких вычислений, не требуют априорных допущений относительно свойств характеристик сетевой потоковой системы, и результаты определяются на основе входных данных и функции, характеризующей связь между входными и выходными данными.

Выводы

1. Определены виды и причины возникновения нечеткости при решении основных сетевых потоковых задач и сделано заключение о том, что существующие методы решения этих задач не всегда позволяют корректно моделировать описанные неопределенности.

2. Исследована возможность представления и учета неопределенностей, связанных с неточностью и субъективностью представления информации в сетевой потоковой системе с помощью нечеткой потоковой сетевой модели. Представлена классификация представления нечетких сетевых моделей, определены основные характеристики нечетких сетевых потоковых систем и описаны основные способы определения нечетких ограничений в этих системах.

3. Показана возможность представления предложенной моделью различных видов неопределенностей, не связанных со случайностью, и дополнительные возможности для анализа подобных неопределенностей на основе теории нечетких множеств.

Литература

1. Свами М., Тхуласираман К., Графы, сети и алгоритмы, М.:Мир, 1984.
2. Клейнрок Л., Теория массового обслуживания, М.:Машиностроение, 1979.
3. Форд Л., Фалкерсон Д., Потоки в сетях, М.:Мир, 1966.
4. Филлипс Д., Гарсиа-Диас А., Методы анализа сетей, М.:Мир, 1984.
5. Фрэнк Г., Фриш И., Сети, связь и потоки, М.:Связь, 1978.
6. D.Hochbaum, Graph algorithms and network flows, IEOR 266, 1997.
7. Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М., Модели неопределенности в многопользовательских сетях, УРСС, Москва, 1999.
8. Жожикашвили В.А., Вишневский В.М., Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ, М.:Радио и связь, 1988.
9. M.Blue, B.Bush, J.Puckett, Applications of fuzzy logic to graph theory, Technical report № LA-UR-96-4792, Los Alamos national laboratory, USA, 1996
10. P.Diamond, A fuzzy max-flow min-cut theorem, Fuzzy sets and systems, 119, 2001.
11. S.Okada, T.Soper, A shortest path problem on a network with fuzzy arc lengths, Fuzzy sets and systems, №109, 2000.
12. Дюбуа Д., Прад А., Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике, М.:Радио и связь, 1990.
13. D.Dubois, H.Prade, Fundamentals of fuzzy sets, 2000.