# КОНТРОЛЬ ГРАФОВ С ОТМЕЧЕННЫМИ ВЕРШИНАМИ

**Грунский И.С., Сапунов С.В.**
Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г.Донецк
E-mail: grunsky@iamm.ac.donetsk.ua, math@iamm.ac.donetsk.ua

**Abstract**
***Grunsky I.S., Sapunov S.V. Checking the graphs with the marked tops.***
*It is considered a problem of constructing of path set in a finite undirected graph for checking its isomorphism with given standard graph.*

**Введение**

В настоящее время актуальны задачи, связанные с анализом графов с помощью блуждающих по ним агентов (роботов, автоматов, поисковых программ и т.п.) [1,2]. При этом агент получает некоторую информацию о графе и на ее основе и на основе априорной информации делает заключение о свойствах графа.

В данной работе рассматриваются конечные неориентированные графы с отмеченными вершинами, которые «видит» агент. Траектории блуждания порождают последовательности отметок вершин, которые и являются локальной информацией о графе.

В [3] введено понятие детерминированного по этим отметкам графа и найдены верхние оценки длин траекторий, различающих вершины известного графа. В настоящей работе рассматривается задача контроля графа (map validation problem [1]) для детерминированных графов. Найдены условия существования и оценка сложности контрольного эксперимента.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 приведена содержательная постановка задачи. В разделе 2 вводятся основные определения и формулируются основные результаты. В разделе 3 приводится их доказательство.

**1. Постановка задачи**

Рассматривается задача контроля конечного неориентированного графа с помощью агента, блуждающего по нему. При этом агент, находясь в вершине графа, считывает отметку этой вершины и вершин, ей инцидентных. Следовательно, агент может определить наличие/отсутствие той или иной отметки в этих вершинах. Агент может блуждать по графу перемещаясь по дугам от вершины к вершине. Задача состоит в том, чтобы, имея полное описание графа-эталона, найти такое множество путей по исследуемому графу, которое позволило бы определить изоморфен граф-эталон исследуемому графу или нет.

Подобная задача изучалась для конечных автоматов Мили [4] и конечных вход-выходных автоматов [5]. Оба эти типа автоматов описываются конечными ориентированными графами, дуги которых отмечены входными и/или выходными сигналами. В [6] показана двойственность между конечными графами с отмеченными дугами и конечными графами с отмеченными вершинами. Показано, что они порождают регулярные языки. Эта двойственность послужила основой для решения поставленной задачи при определенных ограничениях на графы.

**2. Основные определения и формулировка результатов**

Пусть $G=\langle G,E,\mu\rangle$ – конечный, простой [6] (т.е. без кратных ребер и петель), неориентированный граф, у которого $G$ – множество вершин, $E$ – множество ребер (т.е. неупорядоченных пар вершин) и $\mu: G \to M$ – функция отметок вершин, где $M$ – множество таких отметок и $\mu(g)$ – отметка вершины $g$.

Пусть $E(g)$ – это множество вершин, смежных с вершиной $g \in G$. Множество $O(g) = E(g) \cup \{g\}$ называется окрестностью вершины $g$. Следуя [3] граф $G$ назовем детерминированным, если для любой вершины $g$ и любых $t, u \in O(g)$ из $t \neq u$ следует $\mu(t) \neq \mu(u)$. Другими словами, в любой окрестности $O(g)$ нет двух разных вершин, имеющих одинаковые отметки. В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются только детерминированные графы.

Путем в графе $G$ называется конечная последовательность вершин $p = g_1 \ldots g_k$, для которой $(g_i, g_{i+1}) \in E$, $1 \leq i < k$. При этом $k$ называется длиной пути, и говорят, что путь $p$ исходит из вершины $g_1$ и оканчивается в $g_k$. Последовательность $\mu(p) = \mu(g_1) \ldots \mu(g_k)$ назовем отметкой пути $p$. Множество всех отметок $\mu(p)$ всех путей $p$, исходящих из $g \in G$ обозначим $L_g$ и назовем языком, порожденным вершиной $g$. Нетрудно показать, что язык $L_g$ регулярен (в смысле Клини) [4].

Граф $G$ назовем приведенным, если для всех $g, h \in G$ из $g \neq h$ следует $L_g \neq L_h$. Из теории регулярных языков известно, что существует алгоритм проверки последнего неравенства и, тем самым, проверки приведенности графа. В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются только приведенные графы.

Можно сформулировать следующие утверждения.

**Теорема 1.** Пусть $g, h \in G$ и $g \neq h$. Тогда существует отметка пути $q \in L_g \oplus L_h$, длина которой не превосходит $n-1$.

Здесь $\oplus$ – сумма по модулю 2 множеств, а $n$ – число вершин в графе.

Граф $G$ назовем инициальным, если в нем зафиксирована начальная вершина $g_0$. Через $L_G$ при этом обозначим язык $L_{g_0}$.

Пусть $G$ и $H$ инициальные графы. Будем говорить, что они изоморфны и обозначать это $G = H$, если существует биекция $\varphi: G \to H$, для которой $\varphi(g_0) = h_0$, если $(g_1, g_2) \in E_G$, то $(\varphi(g_1), \varphi(g_2)) \in E_H$, и если $\varphi(g) = h$, то $\mu_G(g) = \mu_H(h)$. Ясно, что $H = G$ тогда и только тогда, когда $L_G = L_H$.

**Теорема 2.** Пусть $G$ и $H$ – неизоморфные инициальные графы, число вершин которых не превосходит $n$. Тогда существует $q \in L_G \oplus L_H$, длина которого не превосходит $2n-1$.

Пусть $K$ – класс всех инициальных графов, число вершин которых не превосходит $n$ и вершины, которых отмечены метками из множества $M$. Конечное множество $P$ слов в алфавите $M$ назовем контрольным экспериментом для инициального графа $G$ относительно класса $K$, если для всякого $H \in K$, для которого $H \neq G$, найдется $p \in P$ и $p \in L_G \oplus L_H$. При этом число слов в $P$ назовем кратностью эксперимента, а длину самого длинного слова из $P$ – высотой эксперимента.

Пусть $P$ – контрольный эксперимент. Из определения непосредственно ясно, что если для некоторого графа $H \in K$ $(P \cap L_G) \subseteq L_H$ и $q \notin L_H$ для всех $q \in (P - L_G)$, то $G = H$. Таким образом, имея $P$, требуется проверить в исследуемом графе $H$ наличие всех путей $p$ с отметками $\mu(p)$ из $P \cap L_G$ и отсутствие всех путей $p$ с отметками $\mu(p)$ из $P - L_G$.

Граф $G$ называется связным [7], если для любых $g, h \in G$ существует путь, исходящий из $g$ и заканчивающийся в $h$.

**Теорема 3.** Для каждого связного инициального графа $G$ существует контрольный эксперимент высоты $2n-1$ и кратности не больше $m^{2n-1}$.

Здесь $m$ – мощность множества $M$.

Конечное множество слов $P$ в алфавите $M$ назовем распознающим экспериментом для некоторого класса $N$ инициальных графов, если для всяких $H, F \in N$ найдется такое $p \in P$, что $p \in L_H \oplus L_F$.

**Теорема 4.** Множество $P$, состоящее из всех слов в алфавите $M$ длины $2n-1$, является распознающим экспериментом для класса всех инициальных связных графов с отметками вершин из множества $M$ и числом вершин не превосходящим $n$.

**3. Доказательство теорем.**

Докажем, вначале, следующую лемму.

Определим частичную операцию $\times : G \times M^* \to G$, для любых $g, h \in G$ $g \times m_1 ... m_k = h$ тогда и только тогда, когда существует путь из вершины $g$ в вершину $h$, соответствующий слову $m_1 ... m_k$. Из определения детерминированного графа следует, что таких путей может быть не более одного.

**Лемма 1.** Пусть $G$ – детерминированный граф и $g, h \in G$ вершины, $g \neq h$. Для любого слова $m_1 ... m_k \in L_g \cap L_h$ и любого $j$ $(1 \le j \le k)$ $g \times m_1 ... m_j \neq h \times m_1 ... m_j$.

**Доказательство.** Пусть $m_1 ... m_k \in L_g \cap L_h$. Если для некоторого $j \le k$ $g \times m_1 ... m_j = t = h \times m_1 ... m_j$ $(t \in G)$, то в окрестности вершины $t$ окажутся две различные вершины с меткой $m_{j-1}$, что невозможно по определению $D$-графа. Следовательно $g \times m_1 ... m_{j-1} = h \times m_1 ... m_{j-1}$. Идя по этому пути от $j$ к 1, получаем $g = h$, что невозможно. Лемма доказана.

Докажем теорему 1.

**Доказательство.** Вершины $g, h \in G$ назовем неотличимыми и будем писать $(g, h) \in \rho$, если $L_g = L_h$, в противном случае назовем их отличимыми.

Для любого натурального числа $k$ определим отношение $\rho_k$ между двумя произвольными вершинами $g, h \in G$ имеющее место тогда и только тогда, когда $g$ неотличимо от $h$ никаким словом длины $k$. Вершины $g$ и $h$ будем называть $k$-неотличимыми.

Так как каждое $\rho_k$ является отношением эквивалентности, то им определяется разбиение $P_k$ множества всех вершин графа $G$ на классы эквивалентности. Пусть $|P_i|$ означает число классов эквивалентности в разбиении $P_i$. Покажем, что $|P_k| \le |P_{k+1}|$ для любого $k$.

По определению $k$-отличимости, если вершины $g$ и $h$ находятся в разных классах разбиения $P_k$, то они находятся в разных классах разбиения $P_{k+1}$.

Возьмем две произвольные вершины $g,h \in G$ $(g \neq h)$. Пусть $(g,h) \in \rho_k$ и так как граф $G$ приведен, то $(g,h) \notin \rho$. Так как вершины отличимы, то существует слово, которое устанавливает отличимость. Пусть это слово имеет длину $r$. Рассмотрим пару вершин, в которую переходят $g$ и $h$ по пути, соответствующему первым $r-k-1$ символам различающего слова. По лемме 1 эти вершины различны. Полученная пара вершин отличима словом длины $r-(r-k-1)=k+1$, но не словом длины $k$. Следовательно, разбиение $P_k$ должно содержать в одном классе две вершины, которые в разбиении $P_{k+1}$ принадлежат разным классам.

Таким образом, если в некотором классе разбиения $P_k$ содержатся отличимые вершины, то разбиение $P_{k+1}$ является подразбиением $P_k$. В противном случае $P_k$ и $P_{k+1}$ совпадают.

Покажем, что из $|P_k|=|P_{k+1}|$ следует, что $|P_{k+1}|=|P_{k+2}|$.

Возьмем две различные вершины $g$ и $h$, принадлежащие одному и тому же классу в разбиении $P_{k+1}$. Возьмем произвольные $g' \in O(g) \setminus g$ и $h' \in O(h) \setminus h$ такие, что $\mu(g')=\mu(h')$. По лемме 1, $g' \neq h'$. По определению $k$-неотличимости, вершины $g'$ и $h'$ принадлежат одному классу в разбиении $P_k$. Из $|P_k|=|P_{k+1}|$ следует, что $g'$ и $h'$ принадлежат одному классу в разбиении $P_{k+1}$. Так как вершины $g'$ и $h'$ выбраны произвольно, то из определения $k$-неотличимости следует, что вершины $g$ и $h$ принадлежат одному классу в разбиении $P_{k+2}$.

Покажем, что существует $i \leq n-1$ такое, что $|P_i|=|P_{i+1}|$.

Предположим, что для всех $i \leq n-1$ $|P_i| \neq |P_{i+1}|$. $P_1$ разбивает множество всех вершин по меньшей мере на два класса (в противном случае все вершины имели бы одинаковые отметки и, следовательно, были бы неотличимы). $P_2$ разбивает множество всех вершин по меньшей мере на три класса. По индукции, $P_i$ разбивает множество всех вершин по крайней мере на $i+1$ класс для всех $i \leq n-1$. При $i=n-1$, $P_{n-1}$ разбивает множество всех вершин на $n$ классов. Так как порядок графа равен n, то в каждом классе находится по одной вершине. При $i=n$, $P_n$ должно было бы разбить множество всех вершин на $n+1$ класс, что невозможно. Следовательно, $|P_{n-1}|=|P_n|$.

Из приведенных рассуждений следует, что отличимость двух вершин $D$-графа $G$ порядка $n$ может быть установлена словом длины не большей $n-1$.

Покажем, что эта оценка является точной при $n \leq 3$.

При $n=2$ граф состоит из двух вершин. Если вершины имеют одинаковые отметки, то, по определению $D$-графа, они принадлежат различным компонентам связности и являются неотличимыми. Если вершины имеют различные отметки, то они могут принадлежат как одной компоненте, так и различным. И в том, и в другом случае вершины являются $(n-1)$-отличимыми и, следовательно, отличимыми.

При $n=3$ граф состоит из трех вершин. Если вершины имеют одинаковые отметки, то, по определению D-графа, они принадлежат трем различным компонентам связности и являются неотличимыми. Если вершины имеют различные отметки, то возможна их принадлежность одной, двум и трем компонентам. В любом из этих случаев они являются $(n-2)$-отличимыми. Если совпадают отметки двух вершин графа, то эти вершины, по определению $D$-графа, принадлежат различным компонентам связности. Если таких компонент три, то одинаково отмеченные вершины неотличимы и отличимы от третьей вершины словом длины $n-2$. Если компонент две, то одинаково отмеченные вершины $(n-2)$-неотличимы и $(n-1)$-отличимы.

Теорема доказана.

Докажем теорему 2.

**Доказательство.** Определим граф $F = G \cup H$ как дизъюнктное объединение [7] графов $G$ и $H$. Этот граф не связен и содержит подграфы изоморфные $G$ и $H$. Число вершин графа $F$ не превосходит $2n$. Так как $G \neq H$, то $L_G \neq L_H$ и по теореме 1 любые две вершины этого графа можно различить словом длины не превосходящей $2n-1$. Теорема доказана.

Докажем теорему 3.

**Доказательство.** Пусть граф $G$ – связен.

Полагаем, что $P$ – это множество всех слов в алфавите $M$ длины $2n-1$, то есть $P = M^{2n-1}$.

Для каждого графа $H \in K$ построим характеристическую функцию $f_H$, где $f_H(w)=1$ если $w \in L_H$ и $f_H(w)=0$ в противном случае. Здесь $w \in P$.

Поскольку $G$ связен, то $G \neq H$ влечет $f_G \neq f_H$ и влечет $L_G \neq L_H$. Тогда по теореме 2 существует слово $w \in P$ такое, что $w \in L_G \oplus L_H$.

Следовательно $P$ – контрольный эксперимент.

Теорема доказана.

Докажем теорему 4.

**Доказательство.** Пусть $H, F$ – приведенные, связные, неизоморфные графы порядка $n$. Тогда по теореме 3 множество $P = M^{2n-1}$ является контрольным экспериментом для $H$ относительно класса $K$. Очевидно, что $F \in K$, что и доказывает теорему.

**Литература**

1. Levitt T., Lawton D.T. Qualitative navigation for mobile robot // Artifical Intelligence, 1990, v. 40. – p.305-360

2. Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Щ., Калибарда Г. О поведении автоматов в лабиринтах // Дискретная математика, 1992, т. 4, №3. – с.3-28.

3. Сапунов С.В. Эквивалентность отмеченных графов // Труды ИПММ НАНУ, 2001. – т.7

4. Кудрявцев В.Б., Алексин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов – М: Наука, 1988. – 296 с.

5. Tan Q.M., Petrenko A. Testing of communicating systems, IFIP 11th Int. Workshop, 1998. – p.83-99.

6. Капитонова Ю.В., Летичевский А.А. Математическая теория проектирования вычислительных систем. – М: Наука, 1988 – 296 с.

7. Лекции по теории графов / Емеличев В.А. и др. – М: Наука, 1990. – 384 с.