

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В САУ ЕЛЕКТРОПРИВОДОМ ШЕСТЕРЕННОЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ КЛІТІ ПРОФІЛЕЗГІНАЛЬНОГО СТАНУ ВИРОБНИЦТВА ПОРОШКОВОГО ДРОТУ

Жукова Н.В., Федюк Р.В.

Донецький національний технічний університет, г. Донецьк

кафедра автоматики и телекоммуникаций

Email: Zhnatka@mail.ru

## Abstract

Zhukova N.V., Fedyun R.V. *Mathematical modelling of dynamic processes in an automatic control system by the electrical driver of gear-type differential closet of profiling mills of production of a powder wire. Methods of mathematical simulation is proved, that the security of the matched high-speed condition working shafts in one closet is possible only at presence gear differential closet, and also system of automatic control of the electric driver by working closet.*

У роботі [1] авторами була поставлена проблема узгодження швидкості руху валків з неоднаковими катаючими діаметрами профілезгинальних станів. Було доведено, що об'єкт піддається необхідному регулюванню тільки при вільному відносному прямованні валків робочої кліті, тобто при додатковому використанні механічного саморегулювання за допомогою диференціального вузла (шестеренної диференціальної кліті). Тому ціль даної статті – довести дане твердження методами математичного моделювання.

Механічна система із шестеренною диференціальний кліттю (рис.1) описується в системі трьох чи координат трьох кутів обертання вала двигуна  $\varphi$ , зв'язаного з водилом, і двома півосями диференціала  $\varphi_1, \varphi_2$  з відповідними кутовими швидкостями  $\omega, \omega_1, \omega_2$ , ці координати між собою залежні при жорсткому кінематичному зв'язку водила і півосей диференціала:  $2\omega = \omega_1 + \omega_2$  [4].

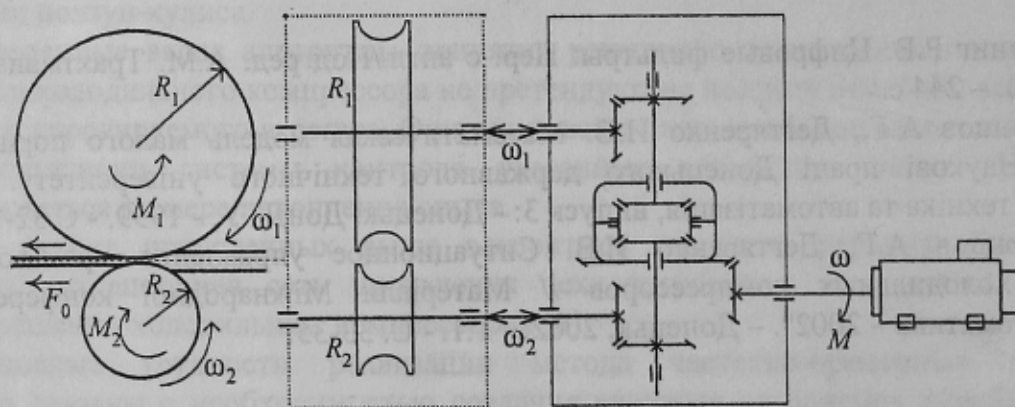


Рисунок 1 - Схема шестеренної диференціальної кліті в комплекті з робочими валками

Сила пружного зв'язку  $F$  між валками при неузгодженому їхньому русі дорівнює

$$F = \frac{E \cdot S}{\ell} \cdot \Delta \ell = C_0 \cdot \Delta \ell, \text{ где } \Delta \ell = \int_0^t (V_1 - V_2) dt = \int_0^t (\omega_1 R_1 - \omega_2 R_2) dt, \text{ де } E, S, \ell, R_{1,2}, V_{1,2}, t - \text{де,}$$

відповідно, модуль пружності, поперечний переріз металу у вогнищі деформації, довжина вогнища деформації, катаючі радіуси валків, лінійні швидкості точок поверхонь валків, час, що тече;  $C_0 = E \cdot S / \ell$ .

При формалізації моделі використаний закон збереження моменту імпульсу і закон збереження енергії для багатозв'язної механічної системи, а також закон Кірхгофа для

електродвигуна постійного струму з незалежним збудженням, регульованого по швидкості. Нелінійна система рівнянь щодо чотирьох невідомих  $\omega$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $I$ , має вид:

$$\begin{cases} CI - M_1 - M_2 = J \frac{d\omega}{dt} + J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + J_2 \frac{d\omega_2}{dt}; & RI + L \frac{dI}{dt} + C\omega = U(t), & 2\omega = \omega_1 + \omega_2 \\ CI\omega - M_1\omega_1 - M_2\omega_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{J\omega^2}{2} + \frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2} \right) \end{cases}, \quad (1)$$

де  $J, J_1, J_2$  - моменти інерції елементів системи, що відповідають трьом осям диференціала,  $R$  - активний опір якоря,  $M_1$  і  $M_2$  - моменти навантажень на робочі валки (з катаючими радіусами  $R_1, R_2$ ), що протидіють електромагнітному моменту електродвигуна  $M = C \cdot I$ , прикладеного до водилу диференціала,  $C$  - постійна машини,  $F_0$  - сила деформації,  $U$  - напруга якоря двигуна, керована ПІ-регулятором.

Оскільки система (1) є нелінійною, розглянемо вихідну задачу в постановці Лагранжа, яка має переваги з рівняннями, що описують звичайні закони Ньютона [2]. Застосовуючи рівняння Лагранжа другого роду [2], електромеханічна система (ЕМС) (рис.1) визначається двома узагальненими координатами  $\varphi$  і  $\psi$ , зв'язаними з кутом повороту водила  $\varphi$  і кутами повороту півосей диференціала  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  наступними співвідношеннями:  $2\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = (\varphi - \Delta) + (\varphi + \Delta)$ . Цим кутовим координатам відповідає кінематичний зв'язок:  $2\omega = \omega_1 + \omega_2 = (\omega - \Delta) + (\omega + \Delta)$  при  $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$  і  $\Delta = \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}$ . Стан шестеренної диференціальної кліти разом з робочою кліткою, її валками, шпинделями, і електродвигуном описується двома рівняннями:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_2, \right. \quad (2)$$

де  $Q_1$  і  $Q_2$  - узагальнені сили,  $T$  - повна кінетична енергія вихідної ЕМС.

$$T = J_B \frac{\omega^2}{2} + J_C \frac{\Delta^2}{2} + J_H \left[ \frac{(\omega - \Delta)^2}{2} + \frac{(\omega + \Delta)^2}{2} \right],$$

де  $J_B$  - момент інерції елементів системи, зв'язаних з водилом,  $J_C$  - момент інерції сателітів диференціала  $J_H$  - момент інерції елементів системи, приведених до півосей диференціала. Розпишемо складові рівнянь системи(2):

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_B \omega + J_H [(\omega - \Delta) + (\omega + \Delta)] = \omega (J_B + 2J_H) = J_1 \omega = J_1 \dot{\varphi};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = J_C \Delta + J_H [-(\omega - \Delta) + (\omega + \Delta)] = \Delta (J_C + 2J_H) = J_2 \Delta = J_2 \dot{\psi}.$$

Тоді система рівнянь (2) має простий вид:

$$\left\{ J_1 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = Q_1; \quad J_2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} = Q_2. \right. \quad (3)$$

Використовуючи процедуру [2] одержання узагальнених сил  $Q_1$  і  $Q_2$ , повідомляємо віртуальні переміщення системи уздовж узагальнених координат  $\varphi$  і  $\psi$  з метою одержання відповідних віртуальних робіт:  $\delta A_1 = Q_1 \delta \varphi = M_\varphi \delta \varphi$  і  $\delta A_2 = Q_2 \delta \psi = M_\psi \delta \psi$ , де  $M_\varphi, M_\psi$  - моменти активних і пасивних сил, прикладених до водилу і півосей диференціала. Отже, одержимо:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= M_\varphi = +M - (M_1 + M_2), \quad Q_2 = M_\psi = +(M_1 - M_2) - F_0(R_1 - R_2); \\
 M_1 &= R_1 \left[ F_0 + C_0 \int_0^t (\omega_1 R_1 - \omega_2 R_2) dt \right] = R_1 F_0 + R_1 C_0 [(\varphi - \psi)R_1 - (\varphi + \psi)R_2] = \\
 &= R_1 F_0 + R_1 C_0 [\varphi(R_1 - R_2) - \psi(R_1 + R_2)]; \\
 M_2 &= R_2 \left[ F_0 - C_0 \int_0^t (\omega_1 R_1 - \omega_2 R_2) dt \right] = R_2 F_0 - R_2 C_0 [(\varphi - \psi)R_1 - (\varphi + \psi)R_2] = \\
 &= R_2 F_0 - R_2 C_0 [\varphi(R_1 - R_2) - \psi(R_1 + R_2)]
 \end{aligned} \tag{4}$$

Тоді система рівнянь (3) для багатозв'язної системи (рис.1) має вид:

$$\begin{cases} J_1 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M - F_0(R_1 + R_2) - C_0 [\varphi(R_1 - R_2) - \psi(R_1 + R_2)](R_1 - R_2) \\ J_2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} = -F_0(R_1 - R_2) + C_0 [\varphi(R_1 - R_2) - \psi(R_1 + R_2)](R_1 + R_2) \end{cases} \tag{5}$$

Додавши ще два рівняння для уніфікованого електропривода з Пі-регулятором, остаточно одержимо:

$$\begin{cases} J_1 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M - F_0(R_1 + R_2) - C_0 [\varphi(R_1 - R_2) - \psi(R_1 + R_2)](R_1 - R_2) \\ J_2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} = -F_0(R_1 - R_2) + C_0 [\varphi(R_1 - R_2) - \psi(R_1 + R_2)](R_1 + R_2) \\ L \frac{dM}{dt} = CU - RM - C^2 \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{dU}{dt} = K_1 \frac{d\alpha}{dt} - K_2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{K_{III}}{T_u} \alpha - \frac{K_3}{T_u} \frac{d\varphi}{dt} \end{cases} \tag{6}$$

Виберемо в якості перемінні стани  $x_1 = \varphi$ ,  $x_3 = \psi$ ,  $x_5 = M$ ,  $x_6 = U - K_1 \alpha$ . Тоді

$$x_2 = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dx_1}{dt}, \quad x_4 = \frac{d\psi}{dt} = \frac{dx_3}{dt}, \quad \frac{dM}{dt} = \frac{dx_5}{dt}, \quad \frac{dU}{dt} - K_1 \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dx_6}{dt} = -K_2 \frac{dx_2}{dt} + \frac{K_{III}}{T_u} \alpha - \frac{K_3}{T_u} x_2.$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -\left(\frac{C_0}{J_1}(R_1 - R_2)^2\right)x_1 + \left(\frac{C_0}{J_1}(R_1^2 - R_2^2)\right)x_3 + \frac{1}{J_1}x_5 - \frac{R_1 + R_2}{J_1}F_0; \\ \frac{dx_3}{dt} = x_4; \\ \frac{dx_4}{dt} = \left(\frac{C_0}{J_2}(R_1^2 - R_2^2)\right)x_1 - \left(\frac{C_0}{J_2}(R_1 + R_2)^2\right)x_3 - \frac{R_1 - R_2}{J_2}F_0; \\ \frac{dx_5}{dt} = -\frac{C^2}{L}x_2 - \frac{R}{L}x_5 + \frac{C}{L}x_6 + \frac{K_1 C}{L}\alpha; \\ \frac{dx_6}{dt} = \left(\frac{K_2 C_0}{J_1}(R_1 - R_2)^2\right)x_1 - \frac{K_3}{T_u}x_2 - \left(\frac{K_2 C_0}{J_1}(R_1^2 - R_2^2)\right)x_3 - \frac{K_2}{J_1}x_5 + \frac{K_2(R_1 + R_2)}{J_1}F_0 + \frac{K_{III}}{T_u}\alpha \end{cases}$$



Запишемо векторно - матричне рівняння динаміки  $\dot{x} = Ax + BU$  в розгорнутому виді:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{C_0}{J_1}(R_1 - R_2)^2 & 0 & \frac{C_0}{J_1}(R_1^2 - R_2^2) & 0 & \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{C_0}{J_2}(R_1^2 - R_2^2) & 0 & -\frac{C_0}{J_2}(R_1 + R_2)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{C^2}{L} & 0 & 0 & -\frac{R}{L} & \frac{C}{L} \\ \frac{K_2 C_0}{J_1}(R_1 - R_2)^2 & -\frac{L}{T_u} & -\frac{K_2 C_0}{J_1}(R_1^2 - R_2^2) & 0 & -\frac{K_2}{J_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_1 + R_2}{J_1} \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_1 - R_2}{J_2} \\ \frac{K_1 C}{L} & 0 \\ \frac{K_{ТП}}{T_u} & \frac{K_2(R_1 + R_2)}{J_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ F_0 \end{bmatrix}; \quad (7)$$

Рівняння виходу  $\dot{x} = Cx + DU$  буде наступним:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

За допомогою пакета прикладних програм MATLAB 5.2 отримані перехідні процеси швидкості водила диференціала  $\omega(t)$ , різниці швидкостей півосей диференціала  $\Delta(t)$ , активного електромагнітного моменту  $M(t)$ , а також активної потужності двигуна  $M\omega(t)$ , прикладеної до водила. Перехідні процеси руху об'єкта з диференціальним механізмом - представлені на рис.2.

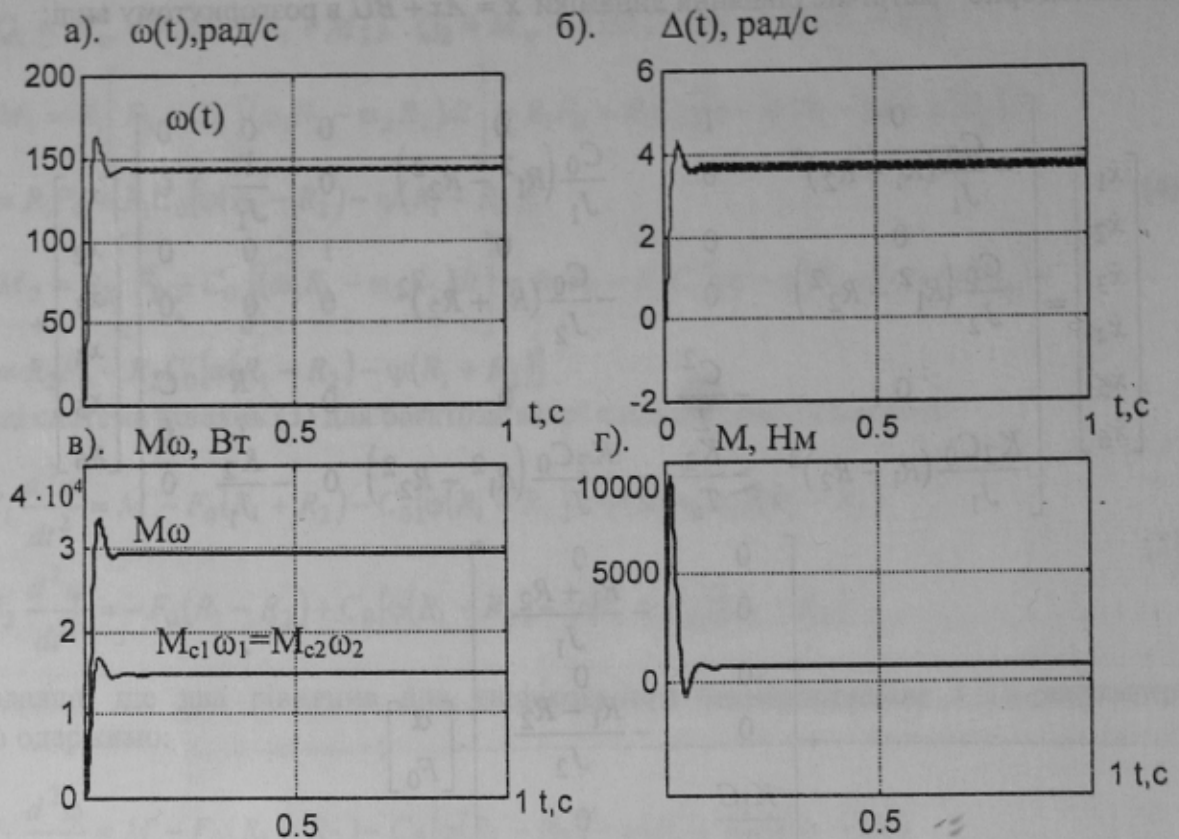


Рисунок 2 – Перехідні процеси системи із диференціальним вузлом

З рис.2.в видно, що при встановленні об'єкта в стаціонарний стан активна потужність двигуна  $M\omega$ , що приведена до водилу, компенсується однаковими потужностями опорів  $M_{c1}\omega_1$  і  $M_{c2}\omega_2$ , прикладених до робочих валків з різними катаючими діаметрами, тобто  $M\omega = M_{c1}\omega_1 + M_{c2}\omega_2$ ;  $M_{c1}\omega_1 = M_{c2}\omega_2$ . Таким чином, диференціал - дільник потужності навпіл між її двома споживачами. Перехідні процеси рис.2.а показують, що регулятор швидкості цілком виконує свою функцію регулювання за завданням швидкості водила за рахунок неоднакового руху півосей диференціала. Звідси випливає, що об'єкт піддається необхідному регулюванню тільки при вільному відносному русі валків робочої кліти, тобто при наявності диференціального вузла.

З огляду на вищесказане можна зробити висновок: оперуючи лише методами автоматичного регулювання неможливо домогтися узгодження швидкостей робочих валків з різними катаючими діаметрами в одній кліті. Позитивні ж результати з'являються з додатковим використанням механічного саморегулювання за допомогою диференціального вузла, тобто шестеренної диференціальний кліті.

#### Література

1. Збірник наукових праць ДонДТУ. Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація, випуск 74. – Донецьк: ДонДТУ, 2004. – С. 58-67.
2. А.А. Федута Теоретическая механика и математические методы. М: "УП "Технопринт", 2000 г., 504с.