РЕКУРРЕНТНЫЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ МЕТОД ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Казакова Н.Ф.,
Одесская национальная академия связи им.А.С.Попова

Известно, что решение задачи линейного программирования по нахождению

$$\max_{x\in X} c^T x \tag{1}$$

где: $c^T = [c_1\ \ c_2\ \ \dots\ \ c_n]$, $X = \left\{x \in R^n : A_m x = y_{(m)},\ x \geq \theta\right\}$,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix},\ y_{(m)} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix},\ A_m = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \dots \\ a_m^T \end{bmatrix},\ \begin{matrix} a_i^T = [a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ \dots\ \ a_{in}], \\ \theta = [0_{i1}\ \ 0_{i2}\ \ \dots\ \ 0_{in}]^T, \\ a_i^T \neq \theta, \end{matrix}$$

при использовании симплекс-метода может привести к необходимости осуществления порядка 2^n элементарных вычислительных операций и в силу этого сделать нереальным его реализацию. Кроме того, возможно возникновение явления зацикливания, при котором решение не достигается. В [1] доказано существование алгоритма решения задачи (1) полиномиальной сложности и предложен метод сфер, имеющий важное теоретическое значение. Ниже обсуждается новый рекуррентный полиномиальный метод, для реализации которого достаточно осуществить не более чем $\frac{3}{2}n^3m^4\left(1+\frac{1}{m}\right)$ элементарных вычислительных операций. Преимуществом метода является простота его практического применения. Метод основывается на использовании свойств матрицы $A_m^c = A_m^c(\sigma, S)$ размера $n \times m$, рассмотренной в [2], и зависящей от перестановки $\sigma \in \Gamma_m$ строк и $S \in \Gamma_n$ столбцов матрицы A_m (Γ_l – симметрическая группа перестановок, содержащая их общее число $l!$). Матрица $A_m^c(\sigma, S)$ ставится в соответствие матрице $A_m(\sigma)$ и находится по рекуррентной формуле (15) из [2], приведенной ниже. Согласно ей, A_m^c имеет ранг r, равный рангу исходной матрицы A_m.

При этом матрица $A_m^c(\sigma,S)$ содержит r ненулевых столбцов и r ненулевых строк. Остальные $m-r$ столбцов ($n-r$ строк) матрицы $A_m^c(\sigma,S)$ нулевые. Для данных σ и S номера r ненулевых столбцов (номера r ненулевых строк) матрицы $A_m^c(\sigma,S)$ соответствуют номерам r линейно независимых строк (номерам r линейно независимых столбцов) матрицы $A_m(\sigma)$. На пересечении ненулевых столбцов и ненулевых строк матрицы $A_m^c(\sigma,S)$ лежит матрица $B_r^{-1}(\sigma,S)$, обратная матрице $B_r(\sigma,S)$, лежащей на пересечении соответствующих им r линейно независимых строк и r линейно независимых столбцов матрицы $A_m(\sigma,S)$. Совокупность всех матриц $B_r^{-1}(\sigma,S)$ и $B_r(\sigma,S)$ может быть получена в результате нахождения $A_m^c(\sigma,S)$ при различных $\sigma\in\Gamma_m$ и $S\in\Gamma_n$. Рассматривая систему уравнений

$$a_1^T x = y_1,\ a_2^T x = y_2,\ \ldots,\ a_m^T x = y_m \tag{2}$$

или векторное уравнение

$$A_m x = y_{(m)}, \tag{3}$$

заключаем, что вектор

$$x_{(m)}(\sigma,S) = A_m^c(\sigma,S)\,y_m(\sigma) \tag{4}$$

является решением подсистемы из r уравнений

$$a_{i_1}^T x = y_{i_1},\ a_{i_2}^T x = y_{i_2},\ \ldots,\ a_{i_r}^T x = y_{i_r} \tag{5}$$

или векторного уравнения

$$A_r(\sigma)x = y_{(r)}(\sigma),\quad y_{(r)}(\sigma) = \begin{bmatrix} y_{i_1} \\ y_{i_2} \\ \ldots \\ y_{i_r} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

матрица которого $A_r(\sigma)=\begin{bmatrix} a_{i_1}^T \\ a_{i_2}^T \\ \dots \\ a_{i_r}^T \end{bmatrix}$, $\left(i_\upsilon \in J_m=\{1,2,...,m\},\ \upsilon=\overline{1,r}\right)$,

имеет ранг r, равный рангу матрицы A_m в (3). Это означает, что вектор $x_{(m)}(\sigma,S)\geq\theta$ при $r=m$ является экстремальной точкой множества X, а совокупность всех таких точек может быть получена из (4) при различных $\sigma\in\Gamma_m$ и $S\in\Gamma_n$. Если множество X ограничено, то эта совокупность содержит хотя бы одну точку $x'_{(m)}=x_{(m)}(\sigma',S')$, являющуюся решением задачи (1), а значит, в таком случае

$$\max_{x\in X} c^T x=\max_{\sigma\in\Gamma_m}\ \max_{S\in\Gamma_n,\, x_{(m)}\geq\theta} c^T x_{(m)}(\sigma,S)=\max_{\mu\in\Gamma} c^T x_{(m)}\cdot(\mu)=c^T x'_{(m)}, \quad (7)$$

где $\mu=(\sigma,S)$ – пара перестановок σ и S; Γ – совокупность пар μ, для которых $x_{(m)}(\mu)\geq\theta$, $\Gamma\in\Gamma_m\times\Gamma_n$.

Пусть теперь $r<m$, $m\geq n$, а уравнение (3) разрешимо, т. е.

$$A_m A_m^C y_{(m)}=y_{(m)}. \quad (8)$$

Тогда при данном σ строки матрицы A_m, не содержащиеся в матрице $A_r(\sigma)$, выражаются в виде линейной комбинации строк матрицы $A_r(\sigma)$, а каждое решение уравнения (6) одновременно является решением каждого из уравнений системы (2), не вошедшего в систему (5). Следовательно, множество X в (1) при $r<m$ и выполнении условия (8) представляет собой совокупность неотрицательных решений хотя бы одного из уравнений (6) при $\sigma\in\Gamma_m$, т.е.

$$X \square X_r=\bigcup_{\sigma\in\Gamma_m} X_r(\sigma),\ X_r(\sigma)=\left\{x\in R^n : A_r(\sigma)x=y_{(r)}(\sigma),\ x\geq\theta\right\}.(9)$$

Пусть в (9) каждое из множеств $X_r(\sigma)$ ограничено и при $r\leq m$ выполняется условие (8). Тогда

$$\max_{x\in X} c^T x=\max_{\sigma\in\Gamma_m}\max_{x\in X_r(\sigma)} c^T x=\max_{\sigma\in\Gamma_m}\ \max_{S\in\Gamma_n,\, x_{(r)}\geq\theta} c^T x_{(r)}(\sigma,S)=\max_{\mu\in\Gamma} c^T x_{(r)}\cdot(\mu)$$

или

$$\max_{x\in X} c^T x = \max_{\mu\in\Gamma} c^T x_{(r)}(\mu), \tag{10}$$

где:

$$x_{(r)}(\mu) = A_r^c(\mu)\, y_{(r)}(\sigma). \tag{11}$$

Эффективность предлагаемого метода решения задачи (10) определяется вычислительными особенностями матрицы $A_r^c(\sigma,S)$, которая определяется при данных σ и S посредством следующей рекуррентной процедуры:

Пусть $A_k(\overline{i_k}) = \begin{bmatrix} a_{i_1}^T \\ a_{i_2}^T \\ \dots \\ a_{i_k}^T \end{bmatrix}$, $\overline{i_k} = (i_1\, i_2\, \dots\, i_k)$ есть матрица, составленная из k первых строк матрицы $A_r(\sigma)$. Тогда $A_1(i_1) = a_{i_1}^T = \left[a_{i_1 1}\, a_{i_1 2} \dots a_{i_1 n}\right] \neq \theta^T$. Для матрицы $A_1(i_1)$ вводится матрица-столбец

$$A_1^c = A_1^c(v_1) = A_1^c(i_1, j_1) = a_{i_1}^{Tc}(j_1) = \frac{1}{a_{i_1 j_1}} \begin{bmatrix} \theta \\ 1_{j_1} \\ \theta \end{bmatrix},\ a_{i_1 j_1} \neq 0, \tag{12}$$

где j_1 – номер выбираемого в (12) ненулевого элемента $a_{i_1 j_1}$ строки $a_{i_1}^T$, $v_1 = (i_1, j_1)$ – пара индексов i_1 и j_1, от которых зависит матрица $A_1^c(v_1)$, $v_1 \in \overset{0}{L}_1 = J_m \times J_n$, $i_1 \in J_m$, $j_1 \in J_n$, 1_{j_1} – обозначение для единицы, расположенной на месте с номером j_1, а остальные элементы столбца в (12) – нули.

Матрица $A_1^c(v_1)$ определяется посредством (12) неоднозначно, но во всех случаях (если положить при $a_{i_1}^T = \theta^T$ матрицу $A_1^c \square\, \theta$) выполняются соотношения $A_1 A_1^c A_1 = A_1$, $\quad A_1^c A_1 A_1^c = A_1^c$.

Нахождением матрицы A_1^c завершается первый этап расчета. Далее для матрицы $A_2\left(\overline{i}_2\right)=\begin{bmatrix} a_{i_1}^T \\ a_{i_2}^T \end{bmatrix}$, $\overline{i}_2=\left(i_1,i_2\right)$ определяется

$$A_2^c = A_2^c\left(v_1,v_2\right)=\left[A_1^c\left(v_1\right),\theta\right]+b_2\left(v_1,v_2\right)u_2^T\left(v_1,v_2\right), \qquad (13)$$

где: $b_2\left(v_1,v_2\right)=P_1\left(v_1\right)d_2^{Tc}\left(v_1,v_2\right), P_1\left(v_1\right)=I-A_1^c\left(v_1\right)A_1\left(v_1\right)$, $d_2^T\left(v_1,i_2\right)=a_{i_2}^T P_1\left(v_1\right)\square$

$\square\left[d_{i_2 1}\, d_{i_2 2} \dots d_{i_2 n}\right]\square\ d_2^T$, $I=P_0$ и, так же как в (12), вектор

$$d_2^{Tc}=d_2^{Tc}\left(v_1,v_2\right)=\left.\begin{matrix} \theta, & \text{если } d_2^T=\theta, \\ \dfrac{1}{\alpha_{i_2 j_2}}\begin{bmatrix}\theta \\ 1_{j_2} \\ \theta\end{bmatrix}, & \text{если } d_2^T\neq\theta, \end{matrix}\right\} \qquad (14)$$

где j_2 – номер выбираемого в (14) ненулевого элемента $d_{i_2 j_2}$ строки $d_2^T=d_2^T\left(v_1,i_2\right)$ и $v_2\in L_2=\overset{0}{L}_1-\left\{v_1\right\}$.

Таким образом, при вычислении $A_2^c\left(v_1,v_2\right)$ на основании формулы (13) по $A_1^c\left(v_1\right)$ пара $v_1=\left(i_1,j_1\right)$ уже оказывается выбранной на предыдущем этапе расчета, а в рассмотрение вовлекается одна пара $v_2=\left(i_2,j_2\right)$ индексов i_2 и j_2, принимающих (в силу того, что $v_2\in\overset{0}{L}_2$) на одно меньше значений, чем i_1 и j_1. Последнее обстоятельство подчеркивается обозначением: $2\le i_1\le m, 2\le j_1\le n$. Посредством (13) матрица A_2^c определена неоднозначно, но всегда, как показано в [2], выполняются соотношения $A_2A_2^cA_2=A_2$, $A_2^cA_2A_2^c=A_2^c$, $A_2=\begin{bmatrix} a_{i_1}^T \\ a_{i_2}^T \end{bmatrix}$. Там же для матрицы $A_k\left(\overline{i}_k\right)$ использована формула:

$$A_k^c=A_k^c\left(\overline{v}_{k-1},v_k\right)=\left[A_{k-1}^c\left(\overline{v}_{k-1}\right),\theta\right]+b_k\left(\overline{v}_{k-1},v_k\right)u_k^T\left(\overline{v}_{k-1},v_k\right), \qquad (15)$$

где $\overline{v}_{k-1} = (v_1 v_2 \ldots v_{k-1})$, $v_\upsilon = (i_\upsilon, j_\upsilon) \in \overset{0}{L}_\upsilon = \overset{0}{L}_1 - \{v_1 \ldots v_{\upsilon-1}\}$, а тот факт, что $v_\upsilon \in \overset{0}{L}_\upsilon$, условно выражается как

$$\upsilon \le i_\upsilon \le m,\ \upsilon \le j_\upsilon \le n. \tag{16}$$

Кроме того, $b_k(\overline{v}_{k-1}, v_k) = P_{k-1}(\overline{v}_{k-1}) d_k^{Tc}(\overline{v}_{k-1}, v_k)$, $P_{k-1}(\overline{v}_{k-1}) = I - A_{k-1}^c(\overline{v}_{k-1}) \times \quad \times A_{k-1}(\overline{v}_{k-1})$, $A_{k-1} \square A_{k-1}(\overline{i}_{k-1})$, $P_0 \square I$, $d_k^T = d_k^T(\overline{v}_{k-1}, i_k) = a_{i_k}^T P_{k-1}(\overline{v}_{k-1})$,

$u_k^T(\overline{v}_{k-1}, v_k) \square u_k^T(\overline{v}_{k-1}, i_k) = \left[-a_{i_k}^T A_{k-1}^c(\overline{v}_{k-1}), 1\right]$. При $A_k \square A_k(\overline{i}_k)$ и $A_k^c = A_k^c(\overline{v}_k)$

$$A_k A_k^c A_k = A_k,\ A_k^c A_k A_k^c = A_k^c \tag{17}$$

В связи с выполнением (17) матрица A_k^c названа в [2] псевдополуобратной для A_k. Если $A_k = A$ – квадратная обратная матрица, то $A_k^c = A_k^{-1}$, $k = n$. Из (15) следует, что при нахождении по $A_{k-1}^c(\overline{v}_{k-1})$ матрицы $A_k^c(\overline{v}_{k-1}, v_k)$ набор $\overline{v}_{k-1}$ пар v_c оказывается уже выбранным на предыдущих этапах расчета, а на данном k-м этапе внимание привлекает лишь одна пара $v_k(i_k, j_k)$ и в силу отношения $v_k \in L_k$, согласно (16), область значений индексов i_k и j_k сужается. Обозначим далее как r_k ранг матрицы A_k и рассмотрим ограниченное множество

$$X_k(\overline{i}_k) = \left\{x \in R^n : A_k(\overline{i}_k) x = y_{(k)}(\overline{i}_k), x \ge \theta\right\} \square X_k(\sigma). \tag{18}$$

Если $r_k = k$, то вектор

$x_{(k)} = x_{(k)}(\overline{v}_{k-1}, v_k) = A_k^c(\overline{v}_{k-1}, v_k) y_{(k)}(\overline{i}_k) \ge \theta$ является экстремальной точкой для $X_k(\overline{i}_k)$, причем из (15) следует, что

$$x_{(k)} = x_{(k)}(\overline{v}_{k-1}, v_k) + b_k(\overline{v}_{k-1}, v_k) \Delta_k(\overline{v}_{k-1}, i_k), \tag{19}$$

где

$$\Delta_k(\overline{v}_{k-1}, i_k) = y_{i_k} - a_{i_k}^T x_{(k-1)}(\overline{v}_{k-1}),\ x_{(k)} \square x_{(k)}(\overline{v}_k). \tag{20}$$

Кроме того, вектор $x_{(r)}(\mu)$ из (11) может быть получен по рекуррентной формуле. (19) на основании следующего свойства матрицы $A_k^c\left(\overline{v}_{k-1},v_k\right)$, установленного в [2]: строки $a_{i_1}^T,...,a_{i_k}^T$ матрицы $A_k\left(\overline{i}_k\right)$ линейно независимы тогда и только тогда, когда

$$\forall\,\upsilon=\overline{1,k}\;:\;d_\upsilon\left(\overline{v}_{\upsilon-1},i_\upsilon\right)\neq\theta, \tag{21}$$

причем

$$d_\upsilon\left(\overline{v}_{\upsilon-1},i_\upsilon\right)\neq\theta\Leftrightarrow b_\upsilon\left(\overline{v}_{\upsilon-1},v_\upsilon\right)\neq\theta. \tag{22}$$

Строки $a_{i_1}^T,...,a_{i_{k-1}}^T$ линейно независимы, а строки $a_{i_1}^T,...,a_{i_{k-1}}^T,a_{i_k}^T$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда

$$\left(\forall\,\upsilon=\overline{1,k-1}:d_\upsilon\left(\overline{v}_{\upsilon-1},i_\upsilon\right)\neq\theta\right)\Lambda\left(d_k\left(\overline{v}_{k-1},i_k\right)=\theta\right). \tag{23}$$

Следовательно, если рассматривать перестановки $\sigma\in\Gamma_m$ строк матрицы A_m, при которых на каждом шаге расчета вектора $x_{(r)}(\mu)$ по формулам (15), (19) и (20) векторы $d_k\left(\overline{v}_{k-1},i_k\right)\neq\theta$, то наибольший номер $k=r_i$ такой, что $\forall i_{r+1}=\overline{r+1,m}:d_{r+1}\left(\overline{v}_r,i_{n+1}\right)=\theta$ равен рангу матрицы A_m.

Пусть при всех $\sigma\in\Gamma_m$ множества $X_k(\sigma)$ из (18) ограничены. Тогда,

обозначая $X_k'=\bigcup\limits_{\sigma\in\Gamma_m}X_k(\sigma)=\bigcup\limits_{\overline{i}}X_k\left(\overline{i}_k\right)$, получаем формулу, аналогичную (10), а именно:

$$\begin{aligned}&\max_{x\in X_k'}c^Tx=\max_{\mu\in\Gamma}c^Tx_{(k)}(\mu)=\max_{\overline{v}_k\in G_k}c^Tx_{(k)}\left(\overline{v}_k\right)=\\&\max_{\overline{v}_k=\left(\overline{v}_{k-1},v_k\right)\in G_k}\left(c^Tx_{(k-1)}\left(\overline{v}_{k-1}\right)+\Psi_k\left(\overline{v}_{k-1},v_k\right)\right)\square\, c^Tx_{(k)}\left(\overline{v}_k^*\right),\end{aligned} \tag{24}$$

где $\Psi_k\left(\overline{v}_{k-1},v_k\right)=c^Tb_k\left(\overline{v}_{k-1},v_k\right)\Delta_k\left(\overline{v}_{k-1},i_k\right)$, $G_k\in\overset{0}{G}_k=\prod\limits_{\upsilon=1}^{k}\overset{0}{L}_\upsilon$, $\overline{v}_k=\left(\overline{v}_{k-1},v_k\right)\in G_k$,

а G_k – совокупность наборов $\overline{v}_k$ несовпадающих пар v_υ индексов i_υ и j_υ, удовлетворяющих (16), для которых векторы $x_{(k)}\left(\overline{v}_k\right)\geq\theta$. Исходя из соотношений (10) – (24), приходим к следующему основному результату:

Пусть

$$X_k = \bigcup_{\bar{i}_k \in \pi_k} X_k\left(\bar{i}_k\right), \quad k = \overline{1,r}, \tag{25}$$

где π_k – совокупность наборов $\bar{i}_k = \left(i_1\ i_2 \dots i_k\right)$ индексов i_υ при $i_\upsilon \in J_m$, для которых каждая из матриц $A_k\left(\bar{i}_k\right)$, составленных из строк a_i^T матрицы A_m путем замены a_i^T на $a_{i_\upsilon}^T$, имеет ранг $r_k = k$, $k = \overline{1,r}$. Положим, что $\bar{v}_k \in G_k$, $v_k = L_k$, а

$$\begin{gathered} f_k\left(\bar{v}_k\right) \triangleq f_k\left(\bar{v}_{k-1}, v_k\right) = c^T x_{(k)}\left(\bar{v}_k\right) = c^T x_{(k)}\left(\bar{v}_{k-1}, v_k\right), \\ q_k\left(v_k\right) \triangleq f_k\left(\bar{v}'_{k-1}, v_k\right) = c^T x_{(k)}\left(\bar{v}'_{k-1}, v_k\right), \end{gathered} \tag{26}$$

а также

$$\begin{gathered} q_1\left(v'_1\right) = \max_{v_1 \in \overset{0}{L}_1} f_1\left(v_1\right) = \max_{v_1 \in \overset{0}{L}_1} c^T x_{(1)}\left(v_1\right) \triangleq c^T x_{(1)}\left(v'_1\right), \\ q_2\left(v'_2\right) = \max_{v_2 \in L_2} f_2\left(v'_1, v_2\right) = \max_{v_2 \in L_2} c^T x_{(2)}\left(v'_1, v_2\right) \triangleq c^T x_{(2)}\left(\bar{v}'_2\right), \\ \dots\dots \\ q_k\left(v'_k\right) = \max_{v_k \in L_k} f_k\left(\bar{v}'_{k-1}, v_k\right) = \max_{v_k \in L_k} c^T x_{(k)}\left(\bar{v}'_{k-1}, v_k\right) \triangleq c^T x_{(k)}\left(\bar{v}'_k\right), \\ \bar{v}'_k = \left(v'_1, v'_2, \dots, v'_k\right);\ q_k\left(v'_k\right) = q_{k-1}\left(v'_{k-1}\right) + \max_{v_k \in L_k} \Psi_k\left(\bar{v}'_{k-1}, v_k\right), \end{gathered} \tag{27}$$

где L_k – совокупность пар v_k из $\overset{0}{L}_k$, для которых векторы $x_{(k)}\left(\bar{v}'_{k-1}, v_k\right) \ge \theta$.

Если при $k = r$ каждое из множеств $X_r\left(\bar{i}_r\right)$ в (25) ограничено, то

$$h_r \triangleq \max_{\bar{v}_r \in G_r} f_r\left(\bar{v}_r\right) = \max_{v_r \in L_r} q_r\left(v_r\right) = q_r\left(v'_r\right) = \max_{x \in X_r} c^T x. \tag{28}$$

Для доказательства полученного результата отметим вначале, что из условия $\forall k = \overline{1,r} : r_k = k$ следуют соотношения

$$\forall k = \overline{1,r}; \forall v_k \in L_k : \left|q_k\left(v_k\right)\right| \le M_k, \tag{29}$$

где M_k – (при $k = \overline{1,r}$) некоторые числа, не зависящие от v_k. Действительно, по неравенству Коши-Буняковского $\left|q_k\left(v_k\right)\right| = \left|c^T x_{(k)}\left(\bar{v}'_{k-1}, v_k\right)\right| \le$ $\le \left\|\bar{c}\right\| \cdot \left\|x_{(k)}\left(\bar{v}'_{k-1}, v_k\right)\right\| \le M_k$, где $\bar{c} = \left(c^T\right)^T$, $M_k = \left\|\bar{c}\right\| \max_{v_k \in L_k} \left\|x_{(k)}\left(\bar{v}'_{k-1}, v_k\right)\right\|$, $M_k \in R$, а норма векторов считается евклидовой. Из (12) и (19) следует, что при $k=1$ величина $\|\bar{c}\| \max\limits_{v_1 \in L_1} \left\| x_{(1)}(v_1) \right\| = \|\bar{c}\| \max\limits_{1 \le i_1 \le m} \max\limits_{1 \le j_1 \le n} \left| \frac{c_{i_1} y_{i_1}}{a_{i_1 j_1}} \right| \square M_1 \in R$, $a_{i_1 j_1} \ne 0$, $\frac{y_{i_1}}{a_{i_1 j_1}} > 0$. Пусть $M_{k-1} \in R$, т.е. $S_{k-1} \square \max\limits_{v_{k-1} \in L_{k-1}} \left\| x_{(k-1)}(\vec{v}'_{k-2}, v_k) \right\| \square \left\| x_{(k-1)}(\vec{v}'_{k-2} v''_{k-1}) \right\| \in R$.

Тогда, в силу того, что $v''_{k-1} \in L_{k-1}$, имеем $\left\| x_{(k)}(\vec{v}'_{k-1}, v_k) \right\| = \left\| x_{(k-1)}(\vec{v}'_{k-1}) + \right.$ $\left. + b_k(\vec{v}'_{k-1}, v_k) \Delta_k(\vec{v}'_{k-1}, i_k) \right\| \le S_{k-1} + \left| \Delta_k(\vec{v}'_{k-1}, i_k) \right| \left\| b_k(\vec{v}'_{k-1}, v_k) \right\|$, причем $S_{k-1} \in R \Rightarrow \left| \Delta_k(\vec{v}'_{k-1}, i_k) \right| = \left| y_{i_k} - a_{i_k}^T x_{(k-1)}(\vec{v}'_{k-1}) \right| \in R$. Кроме того, вследствие равенства $r_k = k$ и по свойству матрицы A_k^c при данном $v_k \in L_k$ число $\left\| b_k(\vec{v}'_{k-1}, v_k) \right\|$ представляют собой норму k-го столбца матрицы B_k^{-1}, обратной невырожденной матрице B_k порядка k. Таким образом, из того, что $S_{k-1} \in R$ следует соотношение: $\exists \vec{v}''_k = (i''_k, j''_k) \in L_k : S_k \max\limits_{v_k \in L_k} \left\| x_{(k)}(\vec{v}'_{k-1}, v_k) \right\| \le$ $\le \left(S_{k-1} + \left| \Delta_k(\vec{v}'_{k-1}, i''_k) \right| \left\| b_k(\vec{v}'_{k-1}, v''_k) \right\| \right) \in R$, а значит, $\forall k = \overline{1,r} : M_k \in R$. Неравенство (29) установлено. Из него получаем

$$\forall v_k \in L_k,\ \forall k = \overline{1,r} : q_k(v_k) \ge \underline{h}_k,\ \underline{h}_k \in R, \tag{30}$$

где

$$\underline{h}_k \square \min_{v_k \in L_k} q_k(v_k) = q_{k-1}(v'_{k-1}) + \min_{v_k \in L_k} \Psi_k(\vec{v}'_{k-1}, v_k) \square q_{k-1}(\vec{v}'_{k-1}) + \Psi_k(\vec{v}'_{k-1}, \tilde{v}_k).$$

Аналогично приходим к выводу о том, что равенство $r_k = k$ влечет выполнение соотношения $\forall \bar{v}_k \in G_k, \forall k = \overline{1,r} : \left| f_k(\bar{v}_k) \right| = \left| c^T x_{(k)}(\bar{v}_{k-1}, v_k) \right| \le M'_k \in R$,

где M'_k – числа, не зависящие от $\bar{v}_k$.

При каждом $k = \overline{1,r}$, выполняются условия:

1. $\forall \nu_k \in L_k : q_k(\nu_k) \le h_k \square \max\limits_{\nu_k \in G_k} f_k(\bar{\nu}_k)$;

2. $\forall y < h_k \, \exists \, \bar{\nu}_k \in L_k : y < q_k(\bar{\nu}_k) \le h_k$.

Эти условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы $\max\limits_{\nu_k \in L_k} q_k(\nu_k) = q_k(\nu'_k) = h_k$, $k = \overline{1,r}$. Т.к. по условию каждое из множеств $X_r(\bar{i}_r)$ в (25) при $k = r$ ограничено, то получим искомый максимум $\max\limits_{x \in X_r} c^T x = \max\limits_{\bar{\nu}_r \in G_r} f_r(\bar{\nu}_k) \square h_r$, а значит, если условия 1 и 2 установлены при $k = \overline{1,r}$, то их выполнение для $k = r$ доказывает полученный результат.

Список источников

1. Хачиян Л.Г. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании. – ДАН СССР, №5, 1979. – 244 с.

2. Судаков Р.С. Теория псевдополуобратных матриц и ее применение к задачам надежности. – М.: Знание. – 1981. – 107 с.

ПРИМЕНЕНИЕ АДАПТИВНИХ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ ТЕСТОВ ЦИФРОВЫХ СХЕМ.

Скобцов Ю.А., Иванов Д.Е., Скобцов В.Ю., Закусило С.А.
Донецкий национальный технический университет,
Институт прикладной математики и механики НАН Украины

В настоящее время по-прежнему остается актуальной задача генерации тестов для последовательных цифровых устройств (ЦУ). При генерации тестов схем с памятью применяются три основных подхода: алгоритмы, основанные на расширении метода ветвей и границ, предложенного для комбинационных схем; алгоритмы символьного моделирования и алгоритмы, основанные на моделировании. Первые два подхода дают неприемлемые результаты для схем большой размерности. Поэтому в последнее время широко разрабатывается третий подход, к которому относятся и генетические алгоритмы (ГА) генерации тестов.