5.Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. - М.:Наука,1966.-400с.

6.Справочник по типовым программам моделирования/ А.Г.Ивахненко, Ю.В.Коппа, В.С.Степашко и др.; Под.ред. А.Г.Ивахненко. - К.:Техніка, 1980. - 184с.

7.Фоменко Т.Г., Бутовецкий В.С. Погарцева Е.М. Технология обогащения углей: Справочное пособие. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.:Недра, 1985. - 367с.

8.Романенко В.Д., Игнатенко Б.В. Адаптивное управление технологическими процессами на базе МикроЭВМ: Учеб. пособие. - К.:Выща шк., 1990. - 334с.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И КАЧЕСТВА ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ОДНОГО ПАРАМЕТРА

Беляева Л.Л.,

Севастопольский национальный технический университет

Рассматриваются системы автоматического управления (рисунок 1), включающие звенья с математическими моделями в виде дробно–рациональных передаточных функций

$$W_i(s)=\frac{b_i(s)}{a_i(s)};\quad b_i(s)=\sum_{l=0}^{m_i} b_{il}s^l;\quad a_i(s)=\sum_{k=0}^{n_i} a_{ik}s^k \quad (i=1,\ldots,g),$$

суммирующие элементы, математическую модель цифрового регулятора $W_P(z)=\dfrac{b_1(z)}{a_1(z)}$.

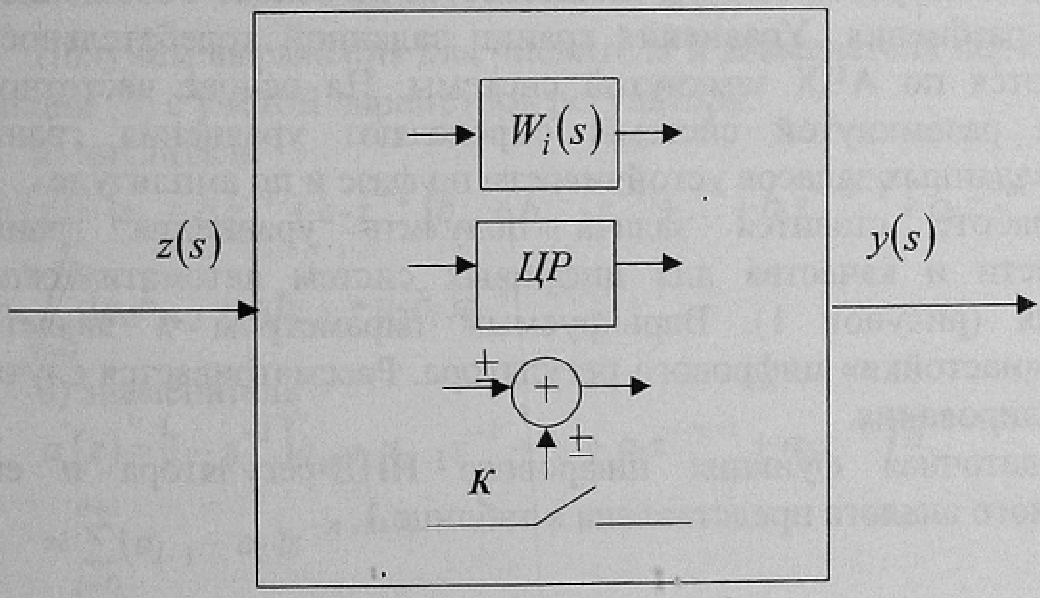

Рисунок 1 - Общая структура цифровой САУ

Математическая модель системы (рисунок 1) в комплексной области представляется в виде отношения двух многочленов

$$\Phi(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{b(z)}{a(z)}, \tag{1}$$

где $a(z)$-характеристический многочлен системы.

$$a(z) = a_n + a_{n-1}z^{-1} + \ldots + a_1 z^{-n-1} + a_0 z^{-n} \tag{2}$$

Коэффициенты квазимногочленов $b(z)$, $a(z)$ зависят от вектора варьируемых параметров $\lambda \in \Lambda \subseteq R^r$. Решается задача определения подмножества $\Lambda_z \subseteq \Lambda$, такого чтобы система удовлетворяла заданным свойствам для любых λ из множества Λ_z. Известными методами решения поставленной задачи являются: метод перебора, аналитический метод.

В настоящее время развиваются методы определения границ областей заданных свойств системы на основе частотных методов и их алгебраизации. Это объясняется тем, что частотные методы позволяют определить основные данные о системе: устойчивость, перерегулирование, полосу пропускания, запасы устойчивости по фазе γ и по амплитуде $\frac{1}{a}$, показатель колебательности *M*.

В условиях параметрической неопределенности, уравнения границ областей устойчивости составляются на основе обобщенного метода D-разбиения. Уравнения границ заданной колебательности определяются по АЧХ замкнутой системы. На основе частотного годографа разомкнутой системы определяют уравнения границ областей заданных запасов устойчивости по фазе и по амплитуде.

В работе ставится задача получить уравнения границ устойчивости и качества для цифровых систем автоматического управления (рисунок 1). Варьируемым параметром λ является параметр «настойки» цифрового регулятора. Рассматривается случай ПИД-регулирования.

Передаточная функция цифрового ПИД-регулятора и его непрерывного аналога представлена в таблице 1.

Таблица 1

Наименование устройства	Передаточная функция непрерывного аналога $W_p(s)$	Дискретная передаточная функция $W_p(z)$
ПИД-регулятор	$k_R\left(1+T_\partial s+\frac{1}{T_u s}\right)$, где $T_Д$-постоянная времени дифференцирующей составляющей; $T_И$- постоянная времени интегрирующей составляющей.	$\frac{c_0+c_1z^{-1}+c_2z^{-2}}{1-z^{-1}}$, где $c_0=k_R+\frac{k_R}{T_u}+1$; $c_1=-k_R-a-1$; $c_2=a$, $0<b<1$

Математическая модель приведенной непрерывной части системы с учетом фиксатора нулевого порядка может быть записана в виде:

$$U(\omega,\lambda)\quad W_{пнчс}(z)=\frac{b_m+b_{m-1}z^{-1}+\ldots+b_1z^{-m-1}+b_0z^{-m}}{a_n+a_{n-1}z^{-1}+\ldots+a_1z^{-n-1}+a_0z^{-n}}. \tag{3}$$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(z)=W_p(z)\cdot W_{пнчс}(z)=\frac{b'(z)}{a'(z)}. \tag{4}$$

Получим выражения для числителя и знаменателя передаточной функции (3) с учетом параметров регулятора:

а) числитель

$$b'(z)=\left(c_0+c_1z^{-1}+c_2z^{-2}\right)\left(b_m+b_{m-1}z^{-1}+\ldots+b_1z^{-m-1}+b_0z^{-m}\right)=$$
$$=\sum_{i=0}^{m+2}\left(c_0b_{i+2}+c_1b_{i-1}+c_2b_i\right)z^{-m-2+i}; \tag{5}$$

б) знаменатель

$$a'(z)=\left(1-z^{-1}\right)\left(a_n+a_{n-1}z^{-1}+\ldots+a_1z^{-n-1}+a_0z^{-n}\right)=$$
$$=\sum_{i=0}^{n+1}\left(a_{i-1}-a_i\right)z^{-n-1+i}. \tag{6}$$

Тогда с учетом выражений (5), (6) передаточная функция замкнутой системы примет вид:

$$\Phi(z)=\frac{\sum\limits_{j=0}^{m+2}\left(c_0 b_{j+2}+c_1 b_{j+1}+c_2 b_j\right)z^{-m-2+j}}{\sum\limits_{i=0}^{n+1}\left(a_{i-1}-a_i\right)z^{-n-1+i}.+\sum\limits_{j=0}^{m+2}\left(c_0 b_{j+2}+c_1 b_{j+1}+c_2 b_j\right)z^{-m-2+j}}. \quad (7)$$

В выражении (7) умножим каждый одночлен числителя на z^{m+2} и знаменателя на z^{n+1}, выполним замену $z=e^{Ts}$. При условии, что варьируемый параметр λ - это один из коэффициентов цифрового регулятора $c_i, i=0\ldots2$, передаточную функцию можно записать в виде отношения квазимногочленов:

$$\Phi\left(e^{sT},\lambda\right)=\frac{\sum\limits_{l=0}^{q} b_l''(\lambda)e^{lsT}}{\sum\limits_{k=0}^{p} a_k''(\lambda)e^{ksT}}. \quad (8)$$

Характеристическое уравнение системы:

$$a(e^{sT},\lambda)=\sum_{k=0}^{p} a_k''(\lambda)e^{ksT} \quad (9)$$

Зависимость элементов уравнения (9) от параметра λ является линейной, тогда

$a_k''(\lambda)=\lambda, \forall k\in[1;n]$;

$a_k''(\lambda)=a_{0k}+\lambda a_{1k}, \forall k\in[1;n]$.

Уравнение (9) можно представить в виде

$a(e^{sT},\lambda)=\lambda Q(e^{sT})+R(e^{sT})$ или $\lambda Q(e^{sT})=-R(e^{sT})$.

Отсюда получим уравнение границы устойчивости

$$\lambda(\omega)=-\left.\frac{R\left(e^{sT}\right)}{Q\left(e^{sT}\right)}\right|_{s=j\omega}=\operatorname{Re}\lambda(\omega)+\operatorname{Im}\lambda(\omega), \omega\in\left[-\pi/_{\mathrm{T}};\pi/_{\mathrm{T}}\right]. \quad (10)$$

Учитывая, что $e^{j\omega T}=\cos\omega T+j\sin\omega T$, квазимногочлены $R\left(e^{j\omega T}\right), Q\left(e^{j\omega T}\right)$ можно представить в виде

$$R(\omega) = \operatorname{Re} R\left(e^{j\omega T}\right) + \operatorname{Im} R\left(e^{j\omega T}\right) = \sum_{k=0}^{m} r_k \cos k\,\omega T + j \sum_{l=0}^{m} r_l \sin k\,\omega \mathrm{T}, \quad (11)$$

$$\mathrm{Q}(\omega) = \operatorname{Re} \mathrm{Q}\left(e^{j\omega T}\right) + \operatorname{Im} \mathrm{Q}\left(e^{j\omega T}\right) = \sum_{k=0}^{m} q_k \cos k\,\omega T + j \sum_{l=0}^{m} q_l \sin k\,\omega T.$$

С учетом соотношений (11) уравнение (10) примет вид

$$\lambda(\omega) = -\left[\frac{\sum\limits_{k=0}^{m} r_k \cos k\,\omega T + j \sum\limits_{k=0}^{m} r_k \sin k\,\omega T}{\sum\limits_{k=0}^{m} q_k \cos k\,\omega T + j \sum\limits_{l=0}^{m} q_l \sin k\,\omega \mathrm{T}}\right]$$

Тогда

$$\operatorname{Re} \lambda(\omega) = -\left[\frac{\sum\limits_{k=0}^{m} r_k \cos k\,\omega T \cdot \sum\limits_{k=0}^{m} q_k \cos k\,\omega T - \sum\limits_{l=0}^{m} r_l \sin k\,\omega \mathrm{T} \cdot \sum\limits_{l=0}^{m} q_l \sin k\,\omega \mathrm{T}}{\left(\sum\limits_{k=0}^{m} q_k \cos k\,\omega T\right)^2 + \left(\sum\limits_{l=0}^{m} q_l \sin k\,\omega \mathrm{T}\right)^2}\right],$$

$$\operatorname{Im} \lambda(\omega) = -j\left[\frac{\sum\limits_{l=0}^{m} r_k \sin k\,\omega T \cdot \sum\limits_{k=0}^{m} q_k \cos k\,\omega T - \sum\limits_{k=0}^{m} r_l \cos k\,\omega \mathrm{T} \cdot \sum\limits_{l=0}^{m} q_l \sin k\,\omega \mathrm{T}}{\left(\sum\limits_{k=0}^{m} q_k \cos k\,\omega T\right)^2 + \left(\sum\limits_{l=0}^{m} q_l \sin k\,\omega \mathrm{T}\right)^2}\right]. \quad (12)$$

Таким образом, граница области устойчивости при неопределенности одного параметра определяется соотношениями (12). Дальнейшее решение задачи заключается в выборе таких решений $\lambda \in [\lambda_i; \lambda_{i+1}]$, $\mathrm{i} = \overline{1,m}$, для которых все абсолютные значения вещественных частей корней характеристического квазимногочлена (9) меньше единицы.

В случае, когда параметр имеет полиномиальную зависимость квазимногочлен можно записать в виде

$$a\left(\lambda, e^{sT}\right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} a''_{il} \lambda^l e^{isT}.$$

Если изменить порядок суммирования, то получим

$$a\left(\lambda, e^{sT}\right) = \sum_{l=0}^{k} \lambda^l \sum_{i=0}^{n} a''_{il} e^{isT}. \quad (13)$$

Для получения уравнений границ области устойчивости в выражении (13) выполним замену $s = j\omega$:

$$a(\lambda , j\omega) = \sum_{l=0}^{k} \lambda^{l} \sum_{i=0}^{n} a_{il}^{''}(\cos i\omega T + j \sin i\omega T) = \sum_{l=0}^{k} \lambda^{l} b_{l}(j\omega).$$

Представим $b(j\omega)$ в виде $b_l(j\omega) = c_l(\omega) + jd_l(\omega)$,

где $c_l(\omega) = \sum_{i=0}^{n} a_{il}^{''} \cos i\omega T$,

$$d_l(\omega) = \sum_{i=0}^{n} a_{il}^{''} \sin i\omega T . \qquad (14)$$

С учетом (14) уравнения границы области устойчивости примут вид

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{k} \lambda^{l} c_l(\omega) = 0, \\ \sum_{l=0}^{k} \lambda^{l} d_l(\omega) = 0. \end{cases}$$

Уравнения границ областей заданной колебательности записываются как

$$\begin{cases} (U(\omega,\lambda) - U_0)^2 + V^2(\omega,\lambda) = R^2, \\ \dfrac{dV(\omega,\lambda)}{dU(\omega,\lambda)} = -\dfrac{U(\omega,\lambda) - U_0}{V(\omega,\lambda)}, \end{cases}$$

где $U(\omega,\lambda)$, $V(\omega,\lambda)$ действительная и мнимая части передаточной функции разомкнутой системы, $R = \dfrac{M^2}{M^2 - 1}$ - радиус окружности с центром в точке $(-1, j0)$.

В случае секторного запаса устойчивости по фазе $-\pi + \gamma < \arg(W(j\omega)) \leq \pi - \gamma$. Уравнения касания годографа в крайних точках сектора и в случае пересечения сектора годографом:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(W(j\omega,\lambda)) = u_0, \\ \mathrm{Im}(W(j\omega,\lambda)) = v_0, \\ \mathrm{Re}(W(j\omega,\lambda)) = u_0, \\ \mathrm{Im}(W(j\omega,\lambda)) = -v_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} U^2(\omega,\lambda) + V^2(\omega,\lambda) = R^2, \\ \dfrac{dV(\omega,\lambda)}{dU(\omega,\lambda)} = -\dfrac{U(\omega,\lambda)}{V(\omega,\lambda)}. \end{cases}$$

Для построения уравнений границ областей запаса устойчивости по амплитуде задан интервал $\left[-2+{}^{1}\!/_{a_{\min}} < {}^{1}\!/_{a} < {}^{1}\!/_{a_{\min}}\right]$. Уравнения, описывающие пересечение годографом границ интервала и при переходе через интервал принимают вид:

$$\begin{cases} U(\omega,\lambda)+2-a_{\min}^{-1}=0, \\ V(\omega,\lambda)=0, \\ U(\omega,\lambda)+a_{\min}^{-1}=0, \\ V(\omega,\lambda)=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dV(\omega,\lambda)}{dU(\omega,\lambda)}=0, \\ V(\omega,\lambda)=0. \end{cases}$$

В качестве примера рассматривается ЦАС регулирования скорости [2, стр.163] с ПИД – регулятором. Известны параметры регулятора: $c_2=1, k_R=1$. Варьируемым параметром является коэффициент c_0. Получены следующие результаты:

– система устойчива при $c_0=1{,}82\ldots 2$;

– заданный показатель колебательности $M=1.3$ обеспечивается при изменении параметра c_0 в пределах от 1,9-1,95;

– заданные запасы устойчивости по амплитуде, равном 0,5 допускается область изменения параметра 1,92-1,95 и по фазе, равном γ=30 град c_0 допускается в области 1,91-1,93.

Список источников

1. Пряшников Ф.Д. Уравнения границ областей заданного качества линейных систем автоматического управления./ Ф.Д. Пряшников. // Автоматика-2000: Материалы междунар. науч.-техн. конф., Львов, 11-15 сентября 2000.- Львов, 2000. – Т.1. – С.206-210.
2. Батоврин А.А. Цифровые системы управления электроприводами./ А.А. Батоврин, П.Г. Дашевский и др.-Л.: Энергия, 1977.