

$$a = \sqrt{\frac{F_n}{\rho_l}} = \sqrt{\frac{10}{1 \times 3,14 \times (0,35 \times 10^{-3})^2 \times 0,4 \times 10^3}} \approx 81,6 \text{ м/с}$$

Таким образом, даже при максимальной скорости обращения нити $V_n = 9$ м/с скорость распространения волны V_g в нити на порядок выше, а время полного успокоения колебаний составляет

$$t_{\text{мин}} = \frac{2l}{a} \approx 0,024 \text{ сек.}$$

За это время перемещение нити составит примерно $22 \cdot 10^{-2}$ м. Если колебание возникнет в той же точке, где будет приложено управление $u(t)$, то оно будет погашено ещё до попадания в область кристалла и за время $t_{\text{мин}}$ реального дефекта не возникнет.

При нахождении нити в контакте с кристаллом следует учитывать дополнительную силу сопротивления и решение задачи должно основываться уже на другом уравнении.

Список источников

1. Рогачёв А.И., Суздаль В.С., Абрамова Л.С. Исследование процесса возникновения дефектов при разрезании монокристаллов//Автоматика и приборостроение. Вестник ХПИ.-Харьков: Основа, 1990.-Вып.16.-№278.-С.11-13.
2. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределёнными параметрами.- М.:Наука.-1975.-568с.

ИТЕРАЦИОННО-ИНВЕРСНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ РОБАСТНОГО НАБЛЮДЕНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

Кортунов В.И., Дыбская И.Ю. Национальный аэрокосмический университете им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Восстановление возмущений в динамических системах или идентификация входных сигналов широко используется в теории управления [1], теории обработки сигналов и теории обратных задач [2], а множество практических приложений требуют эффективных методов решения задач восстановления входных сигналов (ВВС) в реальном масштабе времени [3].

В настоящей работе задача ВВС для линейных динамических систем решается инверсией динамической модели на основе итерационной процедуры в пространстве состояния, работоспособной по текущим данным или в режиме реального времени. Регуляризация обращения модели производится за счет ограничения числа итераций и параметризации каждого шага итерации.

Итерационная инверсия динамической модели в пространстве состояния. Предполагаем, что исследуемый объект описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= f(x_0(t), u(t), v_0(t), \theta(t), t), x_0(t_0) = x_0^0, \\ y_0(t) &= g(x_0(t), u(t), v_0(t), \theta(t), t) + \xi(t) \end{aligned} \quad (1)$$

где $x_0(t)$ – вектор состояния размерности $\dim(x_0) = n_x^0$; x_0^0 – вектор начального состояния; $y_0(t)$ – вектор выхода размерности $\dim(y_0) = n_y^0$; $u(t)$ – вектор управления размерности $\dim(u) = n_u$ и $u(t) \in L_2$; $v_0(t)$ – вектор параметров неконтролируемых внешних возмущений размерности $\dim(v_0) = n_y^0$ и $v_0(t) \in L_2$. Специальные свойства возмущений оговариваются принадлежностью к некоторому подпространству $\Omega_0 \in L_2$ и $v_0(t) \in \Omega_0$; $\theta(t)$ – вектор параметров, в общем случае нестационарный и ограниченный $\theta(t) \in \Omega_\theta$ размерности $\dim(\theta) = N_\theta$, а Ω_θ – область возможных значений параметров; $f(\cdot), g(\cdot)$ – вектор – функции уравнений состояния и выхода, отвечающие условиям единственности решения; $\xi(t)$ – случайный вектор измерительных помех, который статистически не связан с вектором возмущения.

Предположим, что допустимо представление модели вида (1) в виде номинальной линейной части и некоторого входного сигнала – эквивалентного возмущения функционального типа с ограниченной «мерой» энергии. Тогда систему (1) заменяем номинальной возмущенной системой

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_v v(t), \\ y(t) &= Cx(t) + D_u u(t) + D_v v(t) + \xi(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $x(t)$ - вектор состояния размерности $\dim(x) = n_x$; $y(t)$ - вектор выхода размерности $\dim(y) = \dim(y_0) = n_y^0$; $v(t)$ - вектор эквивалентных возмущений размерности $\dim(v) = n_v^0$, который аккумулирует различные неопределенности внутреннего и внешнего характера; A, B_u, B_v, C, D_u, D_v - матрицы соответствующей размерности.

Степень приближения двух моделей (1) и (2) определяется возможностями восстановления или оценивания вектора $v(t)$. Применим для восстановления данного вектора следующую процедуру.

Принимая эквивалентные возмущения известными $v(t) = \hat{v}_0(t)$, запишем наблюдатель состояния по линейной номинальной модели

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_0 &= A\hat{x}_0(t) + L(y(t) - C\hat{x}_0(t) - D_u u(t) - D_v \hat{v}(t)) + B_u u(t) + B_v \hat{v}_0(t), \\ \hat{y}_0(t) &= C\hat{x}_0(t) + D_u u(t) + D_v \hat{v}(t), \hat{x}_0(0) = \hat{x}_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где L - матрица усиления наблюдателя, $\hat{x}_0(t)$ - оценка вектора состояния на нулевой итерации.

Сформируем оценку возмущения на первом шаге итерации следующим образом [4]. Примем на нулевом шаге, что оценка $\hat{x}_0(t)$ известна, тогда на первом шаге оценку получим через ошибку наблюдения

$$\hat{v}_1(t) = \hat{v}_0(t) + K_v(y(t) - \hat{y}_0(t)), \quad (4)$$

где K_v - матричный коэффициент коррекции сходимости.

Повторяя процесс подстановки оценки в правую часть (3) необходимое число раз, получим итерационную процедуру вычисления оценки возмущения. Отметим, что реализация данного способа вычисления оценки возмущения предполагает вычисления оценки состояния с новой оценкой возмущения и содержит только повторение уравнений наблюдателя.

Рассмотрим сходимость итерационной схемы. Представим итерационную схему (4) в операторной форме

$$\hat{v}_1(t) = \hat{v}_0(t) + K_v(W_e^{\hat{y}/v}(v(t) - \hat{v}(t)) + W_e^{\hat{y}/x} \Delta \hat{x}_0 + W_e^{\hat{y}/\xi} \xi(t)), \quad (5)$$

где $W_e^{\hat{y}/v}(s) = C(sI - A + LC)^{-1}B_v + D_v$, $W_e^{\hat{y}/x}(s) = (sI - A + LC)^{-1}$,
 $W_e^{\hat{y}/\xi}(s) = I - W_e^{\hat{y}/y}(s)$ - соответствующие операторам в (5)
 матричные передаточные функции наблюдателя состояния. Приводя
 подобные слагаемые в (5) итерационную схему восстановления
 возмущения запишем в виде

$$\hat{v}_1(t) = (I - K_v W_e^{\hat{y}/v})\hat{v}_0(t) + K_v W_e^{\hat{y}/v}v(t) + W_e^{\hat{y}/v}\Delta\hat{x}_0 + W_e^{\hat{y}/\xi}\xi(t),$$

условием сходимости которой является следующее неравенство [2]

$$\|I - K_v W_e^{\hat{y}/v}\|_{H_\infty} = q < 1, \quad (6)$$

где $\|*\|_{H_\infty}$ - норма комплексно-значных матричных передаточных
 функций пространства Харди.

Схема вычисления оценок (5) обладает модифицирующей
 возможностью учета априорной информации возмущений в форме
 ограничений (амплитудных, частотных, энергетических и др.) в виде
 нерасширяющихся преобразований и основывается на
 нерасходимости модифицированной итерационной процедуры.
 Данный факт позволяет повысить устойчивость оценок к
 измерительным помехам и расширять частотную полосу
 восстанавливаемых возмущений. В качестве ограничивающего
 преобразования можно применять методы нелинейной фильтрации.
 За счет итеративного характера применения таких преобразования
 возрастает эффективность фильтрации от случайных помех и тем
 самым возрастает точность.

Оценка точности вектора возмущения. Запишем ошибку оценки
 возмущения в операторном виде

$$v(t) - \hat{v}_{j+1}(t) = (I - K_v W_e^{\hat{y}/v})(v(t) - \hat{v}_j(t)) - K_v (W_e^{\hat{y}/v}\Delta\hat{x}_0 + W_e^{\hat{y}/\xi}\xi(t)) \quad (7)$$

и оценивания по норме выражение (7) получаем

$$\|v(t) - \hat{v}_{j+1}(t)\|_{L_2} \leq q^j e_0 + \frac{1 - q^j}{1 - q} (e_{x_0} + e_\xi), \quad (8)$$

где $\|v(t) - \hat{v}_0(t)\|_{L_2} = e_0$, $e_{x_0} = \|K_v W_e^{\hat{y}/v}\Delta\hat{x}_0\|_{L_2}$, $e_\xi = \|K_v W_e^{\hat{y}/\xi}\xi(t)\|_{L_2}$.

Полученная оценка ошибки входного сигнала для итерационной
 инверсии позволяет сделать следующие выводы.

Ошибка от задания начального приближения входного сигнала $q^j e_0$ уменьшается с увеличением числа итераций для сходящегося итерационного процесса.

Ошибка от несовпадения начальных условий по состоянию наблюдателя и системы $\frac{1-q^j}{1-q} e_{x_0}$ убывает со скоростью затухания переходных процессов наблюдателя и не уменьшается при увеличении числа итераций.

Ошибка восстановления возмущения в зависимости от измерительной помехи $\frac{1-q^j}{1-q} e_\xi$ определяется ее уровнем и параметрами наблюдателя.

При определении числа итераций по полученным оценкам следует, что их число должно быть как можно меньше для уменьшения влияния помех, а из уменьшения динамической ошибки как можно больше. Для определения реализуемого числа итераций необходимо компромиссное решение, зависящее в основном от уровня измерительных помех и параметризации наблюдателя состояния.

Уравнения восстановления возмущения (4)-(5) называем итерационно-инверсным наблюдателем возмущения и состояния (НСВ). Данный наблюдатель является робастным или грубым по отношению к вектору эквивалентных возмущений, поскольку используется их оценка при восстановлении вектора состояния. По аналогии для непрерывного НСВ можно получить дискретный НСВ, реализация которого требует повторения вычисления оценки состояния на каждом дискретном такте равному числу итераций.

Параметрический синтез дискретного НСВ. Решение задачи параметрического синтеза дискретного НСВ необходимо проводить в несколько этапов, поскольку разрешимость данной задачи зависит от восстанавливаемости или обнаруживаемости входного сигнала, что связано с «левой» обратимостью динамических систем. На первом этапе необходимо установить наблюдаемость линейной динамической системы по состоянию и провести параметрический

синтез наблюдателя состояния из условия возможной динамики. На втором этапе установить восстанавливаемость или обнаруживаемость по входу. Критерием восстанавливаемости или обнаруживаемости для итерационно-инверсных дискретных НСВ может служить следующее утверждение.

Утверждение 1. Для линейной дискретной динамической системы вида

$$x(K+1) = Ax(K) + B_u u(K) + B_v v(K),$$

$$y(K) = Cx(K) + D_u u(K) + D_v v(K),$$

восстанавливаемость по входу выполняется при следующих условиях:

а) полной наблюдаемости пары (A, C) ;

б) $\text{rank}(K_v^{sg}) = \min(n_y, n_v)$, $K_v^{sg} = C(I - A + LC)^{-1}(B_v - LD_v) + D_v$,

$K_v = (K_v^{sg})^+$;

в) сходимости итерационной схемы вычисления оценок входа

$$\|I - K_v W_e^{y/v}(z, L)\|_{H_\infty} = q < 1,$$

г) полной управляемости пары (\tilde{A}, \tilde{B}_v) ,

где $\tilde{A} = A - LC$, $\tilde{B}_v = B_v - LD_v$.

Доказательство. На основании факта невырожденности матрицы $I - A + LC$ для дискретных систем существует матрица K_v . Из условия наблюдаемости пары (A, C) следует возможность обеспечения сходимости итерационной процедуры (условие «в»), что подтверждает существование инверсного динамического оператора и выполнение условия обратимости. Из условия «г» следует возможность влияния ошибки восстановления на выходной сигнал $\Delta \hat{y}_j(K)$. Это условие может обеспечить требование управляемости и/или достижимости системы по возмущению, как существование сигнала, переводящего систему из начального состояния в требуемое конечное за ограниченное число шагов. При невыполнении условия «г» отсутствует возможность изменения оценки на $j+1$ итерации через j -ю итерацию. Таким образом,

условия «а»-«г» являются необходимыми и достаточными условиями существования инверсного динамического оператора.

Выполнение необходимых и достаточных условий инверсии динамических операторов позволяет восстанавливать возмущения в бесконечном диапазоне частот. Однако при наличии измерительных помех, вычислительных ошибок ЭВМ и т.п. искусственно ограничивают частотную полосу восстановления. Например, для многомерных систем характерно и то, что условие сходимости итерационных процедур чаще выполнимо только для низких частот (в сравнении с частотой пропускания объекта), поэтому можно восстановить возмущения только для данного диапазона. Это характерно и для многосвязных систем с сильными перекрестными связями. Поэтому, в этом случае достаточно выполнить условие сходимости для ограниченного диапазона частот.

Утверждение 2. Линейная динамическая система является функционально восстанавливаемой на интервале $[0; \omega_1]$, если условие сходимости итерационной процедуры выполняются для этого диапазона частот $\|I - K_v W_e^{y/v}(j\omega, L)\|_M = q(\omega) < 1$ при $\omega \in [0; \omega_1]$ и $\|\cdot\|_M$ обозначает матричную спектральную норму.

В заключении отметим следующее. По результатам моделирования на методических примерах и экспериментальных данных выявлено, что количество итераций НСВ может не превышает трех и точность восстановления входных сигналов остается удовлетворительной.

Практическая реализация фильтров ВВС для непрерывного времени сводится к построению цепочки однородных фильтров, в которых может присутствовать нелинейный блок учета имеющихся ограничений на возмущения. Дискретная реализация итерационного фильтра содержит один дискретный фильтр с повторением на каждом шаге вычисления оценок с необходимым числом итераций. Результаты моделирования подтверждают работоспособность и эффективность предложенного итерационного метода в задачах динамической коррекции измерений, динамической компенсации возмущения в робастных системах наблюдения и управления.

Моделирование НСВ. Рассмотрим в качестве примера объекта управления моментный двигатель (МД) постоянного тока [5], широко применяемый в качестве исполнительных элементов в системах автоматики, телемеханики и измерительной технике. Уравнения динамики МД с ограниченным углом поворота имеют вид:

$$u = ri + w \frac{d\Phi}{dt}; (I_{\partial} + I_{н}) \frac{d\omega}{dt} = M_{э}(\alpha, i) - M_{н}(\alpha, \omega); \frac{d\alpha}{dt} = \omega, (9)$$

где u - напряжение на зажимах обмотки; i - ток; r - активное сопротивление обмотки, w - число витков обмотки, Φ - сцепленный с обмоткой магнитный поток, I_{∂} и $I_{н}$ - моменты инерции ротора МД и нагрузки; ω - частота вращения ротора; $M_{э}$ - электромагнитный момент; $M_{н}$ - статический момент нагрузки.

Моментная характеристика, полученная по данным эксперимента, представлена на рис. 1.

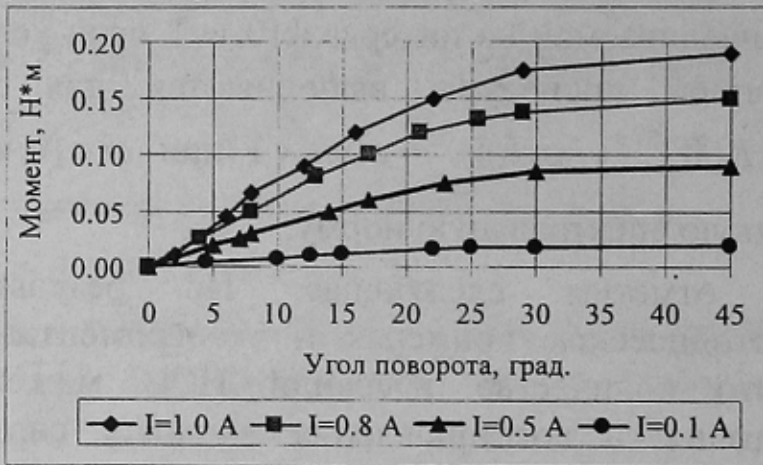


Рисунок 1 - Зависимость момента от угла поворота ротора

Как видно из зависимостей, величина момента, развиваемого двигателем, может быть представлена приближенно зависимостью $M(\alpha, i) = K \cdot i \cdot \cos \alpha$. Данная зависимость удовлетворяет условию Липшица и соответственно может быть скомпенсирована.

По уравнениям (9) синтезирован итерационно-инверсный наблюдатель состояния и возмущения, и проведено моделирование замкнутой системы. Результаты моделирования представлены на рис.2.

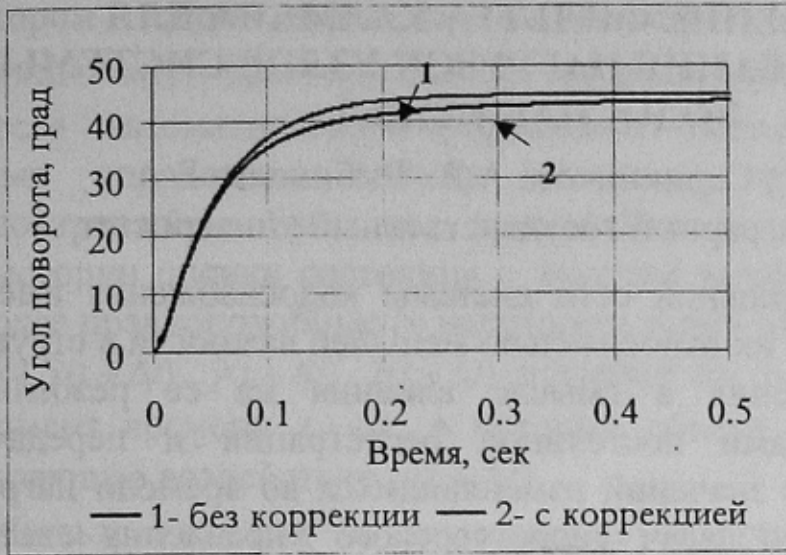


Рисунок 2 - Переходные процессы по углу поворота ротора МД

Получено, что длительность переходных процессов нелинейной системы без дополнительной коррекции и скомпенсированной системы отличаются в 2 раза.

Список источников

1. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные системы. - М.: Наука, 1988.
2. Василенко Г.И., Тараторкин А.М. Восстановление изображений. - М.: Радио и связь, 1986.
3. Клейман Е.Г. Идентификация входных сигналов в динамических системах // АиТ. 1999. № 12.
4. Кортунов В.И. Оценивание возмущений в динамических системах на основе итерационно-инверсных моделей // Системи обробки інформації: Зб. наук. праць. - Харків: НАНУ, ПАНМ, ХВУ, 2001. - Вип.3(13). - С. 56-60.
5. Столов Л.И., Афанасьев А.Ю. Моментные двигатели постоянного тока. - М.: Энергоатомиздат, 1989. - 224с.