МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ И КАЧЕСТВА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Кудашев В.С., Пряшников Ф.Д.

Севастопольский национальный технический университет

В задачах определения областей устойчивости и качества линейных систем автоматического управления с передаточными функциями вида $W(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}$ в пространстве одного или нескольких параметров обычно используют критерии устойчивости или уравнения Д-разбиения. Для более точного определения границ этих областей их необходимо находить алгебраически как решения алгебраических уравнений или системы алгебраических уравнений. Основная проблема при этом заключается в отыскании вещественных корней алгебраического (полиномиального) уравнения с одной или более переменными. Например, при варьировании одной переменной использование критерия Гурвица устойчивости САУ дает систему неравенств

$$\begin{cases}\Delta_1(\lambda)>0,\\ \Delta_2(\lambda)>0,\\ \ldots\\ \Delta_n(\lambda)>0.\end{cases}$$

Здесь λ - варьируемый параметр, Δ_i - диагональные миноры определителя Гурвица для многочлена $A(s)$, n - степень многочлена $A(s)$. Чтобы решить эту систему, требуется найти нули функции $\Delta_i(\lambda)$. Для этого решаются n уравнений вида $\Delta_i(\lambda)=0$. После определения интервалов положительности функций $\Delta_i(\lambda)$ находится пересечение интервалов. Для дробно-рациональных передаточных функций при полиномиальной зависимости коэффициентов знаменателя от варьируемого параметра $\Delta_i(\lambda)$ представляют полиномиальные функции одной переменной.

При использовании уравнения Д-разбиения $A(j\omega)=0$ задача определения границ областей устойчивости сводится при варьировании одного параметра к решению системы

$$\begin{cases} \operatorname{Re} A(\lambda, j\omega)=0, \\ \operatorname{Im} A(\lambda, j\omega)=0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} A_1(\lambda,\omega)=0, \\ A_2(\lambda,\omega)=0. \end{cases}$$

При линейном вхождении λ в коэффициенты $A(s)$ систему можно решить подстановкой, получив полиномиальное уравнение относительно ω.

Эти два примера показывают необходимость наличия способов определения вещественных корней полиномиального уравнения.

Существует несколько методов определения вещественных корней многочлена [1], которые основаны на:

1) теореме Ролля;
2) теореме Штурма;
3) теореме Бюдана-Фурье;
4) теореме Декарта.

При использовании теоремы Ролля приходится находить корни не только исходного многочленов, но и всех производных, не равных тождественно нулю. Использование теоремы Штурма и Бюдана-Фурье предполагает построение системы многочленов, и в концах каждого интервала приходится вычислять значения всех многочленов системы. Однако, теорема Штурма, в отличие от теоремы Бюдана-Фурье, дает точное значение числа корней на интервале. Построение системы многочленов связано с преобразованием коэффициентов, которое при больших степенях исходного многочлена приводит к значительному росту погрешности. Теорема Декарта дает оценку корней на интервале, но оценка ищется достаточно просто. Однако, для использования теоремы Декарта для произвольного интервала приходится использовать дробно-рациональную подстановку.

Применение теорем Ролля, Штурма и Бюдана-Фурье особенно эффективно при малых степенях. Для высоких степеней целесообразно применять теорему Декарта.

Для вычисления вещественных корней многочленов может использоваться также метод, позволяющий определять вещественные корни более широкого класса функций. Пусть $f(x)$ - непрерывная функция на $[a;b]$. Если функция представима в виде

$$f(x) = \sum_{i=0}^{N} \varphi_i(x),$$

причем $\varphi_i(x)$ монотонно не убывает или монотонно не возрастает на $[a;b]$, то можно получить условие отсутствия вещественных корней уравнения $f(x)=0$ при $x \in [a;b]$.

Т.к. $\varphi_i(x)$ либо не убывают, либо не возрастают, то на одном из концов интервала $[a;b]$ они принимают наибольшее, а на другом наименьшее значения.

Пусть

$$\varphi_{\min i} = \begin{cases} \varphi_i(a) \text{ при } \varphi_i(a) < \varphi_i(b), \\ \varphi_i(b) \text{ при } \varphi_i(a) \ge \varphi_i(b), \end{cases}$$

$$\varphi_{\max i} = \begin{cases} \varphi_i(a) \text{ при } \varphi_i(a) \ge \varphi_i(b), \\ \varphi_i(b) \text{ при } \varphi_i(a) < \varphi_i(b), \end{cases}$$

$$f_{\max} = \sum_{i=0}^{N} \varphi_{\max i}, \quad f_{\min} = \sum_{i=0}^{N} \varphi_{\min i}.$$

Условием отсутствия корней уравнения $f(x)=0$ на $x \in [a;b]$ будет

$$\left[\begin{array}{l} f_{\max} < 0, \\ f_{\min} > 0. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Если делить исходный отрезок на части и отбрасывать те из них, на которых выполняется (1), то рано или поздно будут получаться такие интервалы, которые можно принимать с заданной степенью точности за точки. Тогда в любой точке этих интервалов проверяется условие $|f(x)| < \varepsilon$, где ε - наперед заданное малое значение, проверяя тем самым корни уравнения $f(x)=0$.

Если $f(x)$ - многочлен степени n, то для $x \in (0;+\infty)$ $\varphi_i(x) = a_i x^i$, если $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Метод обладает следующими достоинствами:

1) Не требуется отделение корней.
2) На каждом шаге деления необходимо вычислять значения функции в двух точках. Никаких дополнительных вычислений не требуется.
3) Исходный многочлен не преобразовывается. Это означает, что общая погрешность результата уменьшается по сравнению с другими методами.

Основной недостаток – медленная сходимость к корням.

Для многочленов одной переменной предлагается модификация, позволяющая значительно повысить скорость сходимости.

Пусть $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Функцию можно представить в виде

$f(x) = u(x) - v(x)$, причем

$$u_i = \begin{cases} a_i \text{ при } a_i > 0, \\ 0 \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$u_i = \begin{cases} a_i \text{ при } a_i > 0, \\ 0 \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$v_i = \begin{cases} -a_i \text{ при } a_i < 0, \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что при $x > 0$ функции $u(x)$ и $v(x)$ не отрицательны. Кроме того, не отрицательны и все их производные, т.е. $u(x)$ и $v(x)$ не убывают.

На интервале $(a;b)$ при $0 \le a < b$

$u_{\min} = u(a)$; $u_{\max} = u(b)$;

$v_{\min} = v(a)$; $v_{\max} = v(b)$;

$f_{\min} = u_{\min} - v_{\max}$;

$f_{\max} = u_{\max} - v_{\min}$

Из условия (1) получается

$$\begin{cases} u_{\min} - v_{\max} > 0, \\ u_{\max} - v_{\min} < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Пусть, для определенности, $u(a) > v(a)$, т.е. $u_{\min} > v_{\min}$. Случай $u_{\min} < v_{\min}$ полностью аналогичен с точностью до обозначений.

Геометрическая интерпретация условия (2) показана на рисунке 1.

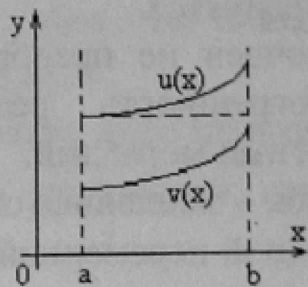

Рисунок 1 – Геометрическая интерпретация условия 2

Т.е. условие (2) геометрически означает то, что прямая $y = u_{\min}$ лежит выше кривой $y = v(x)$ при $x \in (a;b)$.

Модификация данного метода состоит в том, что прямая $y = u_{\min}$ заменяется на касательную к $y = u(x)$ в точке $x = a$, как показано на рисунке 2.

Можно показать, что касательная лежит не выше $u(x)$ на $x \in (a;b)$, т.к. они пересекаются в точке $x = a$, производная касательной равна производной функции $y = u(x)$ в этой точке. Далее производная касательной не изменяется, а производная функции $y = u(x)$ не убывает.

Также можно показать, что если касательная в точке $x = b$ проходит выше $y = v(x)$, то $y = v(x)$ лежит ниже касательной при $x \in (a;b)$.

Действительно, функция $y = v(x)$ лежит не выше хорды, проведенной через точки $(a;v(a))$ и $(b;v(b))$. Это доказывается с применением теоремы Декарта, к примеру. А т.к. $u(a) > v(a)$ и

$y=v(x)$ проходит ниже касательной к $y=u(x)$ при $x=b$, то касательная лежит выше хорды.

Это означает, что $y=u(x)$ лежит выше $y=v(x)$, т.е. уравнение $f(x)=0$ на $x\in(a;b)$ корней не имеет.

Условие (2) приобретает вид

$$\left[\begin{array}{l} \left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=a}(b-a)+u(a)>v(b), \\ \left.\dfrac{dv}{dx}\right|_{x=a}(b-a)+v(a)>u(b). \end{array}\right. \qquad (3)$$

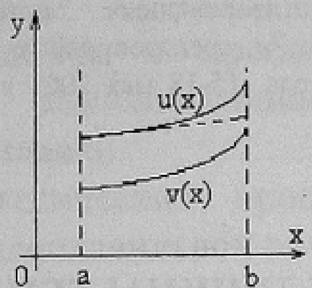

Рисунок 2 – Геометрическая интерпретация условия 3

При использовании этой модификации скорость сходимости увеличивается в десятки (при малых степенях) и сотни (для высоких степеней) раз.

Для уравнений с двумя неизвестными метод допускает обобщение.

Пусть x, y - неизвестные. Пусть $z=f(x,y)$. Уравнение $f(x,y)=0$ можно решить, если применить условие (3) для проекций $f(x,y)$ в плоскостях, параллельных XOY и YOZ.

Для двух переменных метод значительно лучше по обусловленности и быстродействию, чем применение НОД или результанта [2].

Преимущество обусловлено тем, что при применении НОД двух полиномов результирующий многочлен имеет много «лишних» корней. Это обуславливает высокую степень многочлена, что сильно отрицательно сказывается на точности нахождения вещественных корней.

При использовании результанта двух многочленов приходится вычислять определитель матрицы Сильвестра. Сложность и время таких вычислений при больших степенях резко возрастают, и, кроме того, сильно ухудшается обусловленность задачи отыскания корней системы двух полиномиальных уравнений.

Список источников

1. Бухберг Б. Компьютерная алгебра / Б. Бухберг, Дж. Коллинз, Р. Лоос. – М.: Мир, 1986.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. / А.Г. Курош. – М: Наука, 1968.
3. Кудашев В.С., Пряшников Ф.Д. Информационная технология для исследования робастности судовых автоматизированных систем //Проблемы автоматизации электромеханических процессов и электропривода: Материалы междунар. студенч. научн.-техн. конф., г. Севастополь, 15-18 мая 2001 г. - Севастополь: Изд-во СевГТУ, 2001. - С. 14.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВЕЛИЧИНЫ ТЕПЛОВЫХ ПОТЕРЬ ПРИ ПЛАВКЕ В ДСП

Сердюк А.А., Разживин А.В.,
Донбасская государственная машиностроительная академия, Краматорск, Украина

Из-за многообразия действующих факторов, неподдающихся контролю, и вероятностного их характера не могут быть с достаточной для практики степенью точности описаны детерминированными методами процессы, происходящие в дуговой электропечи. В этом случае применяются иные методы, например, статистические.

Специальным и актуальным является вопрос идентификации некоторых состояний процессов плавки, носящих вероятностный характер и неподдающихся непосредственному контролю. Наиболее актуальными являются проблемы идентификации тепловых потерь при дуговой плавке. Эти проблемы могут быть решены с использованием статистических методов принятия решений, а также