МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Баркалов А.А., Красичков А.А.
Кафедра ЭВМ, ДонГТУ
barkalov@cs.dgtu.donetsk.ua

Abstract

Barkalov A.A., Krasichkov A.A. Methods of decomposition of Boolean functions. *The methods of decomposition of Boolean functions are proposed. Authors describe two offered methods, based on known earlier theorems and axioms of Boolean algebra. The examples of synthesis are given.*

Введение

При реализации цифровых устройств управления (УУ) на программируемых логических интегральных схемах (ПЛИС) возникает задача декомпозиции булевых функций (БФ) [4]. Это связано с тем, что БФ от большого числа переменных не реализуется на ПЛИС оптимально [2]. Для реализации БФ, в состав ПЛИС входят так называемые комбинационные логические блоки (КЛБ). С точки зрения аппаратной реализации, КЛБ представляет собой одноразрядное ОЗУ и мультиплексор, и посредством перепрограммирования ОЗУ реализует любую БФ. Проблема состоит в том, что БФ, реализуемая КЛБ может зависеть не более, чем от 7 переменных, а в больших УУ функции зависят от 8-20 переменных. Решение проблемы состоит в разбиении исходной БФ на минимальное количество БФ, каждая из которых зависит от меньшего числа переменных, чем исходная. В настоящей работе предлагается метод декомпозиции БФ с помощью карт Карно и разложения Шеннона.

1. Основные положения

Пусть функция F является БФ от 8 переменных: F=F(a,b,c,d,e,f,g,h) и ее необходимо реализовать на ПЛИС с ограничением по входам КЛБ – 5. Стандартно реализовать эту функцию на таком ПЛИС невозможно. Для решения такой задачи можно применить следующие известные методы:

1. Минимизация функции – применяются такие законы алгебры логики, как закон склеивания, закон поглощения, дистрибутивный закон, и другие. Этот метод не дает гарантированной минимизации, поскольку далеко не все функции минимизируются подобным образом.
2. Разложение Шеннона – в функцию поочередно подставляются все возможные значения одной либо нескольких переменных, в результате чего получается множество функций от меньшего числа переменных. Данный метод всегда приводит к реализации БФ на ПЛИС, однако количество полученных функций равно степени двойки от числа подставляемых переменных. Поэтому его нерационально применять для реализации больших функций [1, 3].

3. Разбиение СДНФ либо СКНФ исходной функции на группы термов, которые затем независимо минимизируются одним из методов, описанных в пп.1-2. Этот метод может дать положительный результат в случае удачного разбиения, при условии, что полученные подфункции благополучно минимизируются [3].

Для реализации БФ на ПЛИС с ограничением предлагается следующий метод. Функция выражается в виде подфункций от меньшего числа переменных, причем в идеальном случае, ни одна подфункция не пересекается с другой по аргументам. Таким образом, для функции F=F(a,b,c,d,e,f,g,h) один из идеальных вариантов реализации выглядит следующим образом:

$$F=f_3[f_1(a,b,c,d),\ f_2(e,f,g,h)],$$

где f_1 – БФ от двух переменных, f_2 и f_3 – БФ от четырех переменных. В этом случае функция реализуется на трех КЛБ. Однако не каждая функция может быть представлена в виде двух независимых подфункций. В этом случае ее можно представить другими способами, допустимыми при заданном ограничении входов КЛБ:

1. $F=f_3[f_1(a,b,c,d,e),\ f_2(f,g,h)]$;
2. $F=f_3[f_1(a,b,c,d,e),\ f_2(d,e,f,g,h)]$;
3. $F=f_4[f_1(a,b,c),\ f_2(d,e,f),\ f_3(g,h)]$;
4. $F=f_5[f_1(a,b),\ f_2(c,d),\ f_3(e,f),\ f_4(g,h)]$;
5. $F=f_5[f_1(a,b,c,d,e),\ f_2(a,b,c,f,g),\ f_3(a,b,c,e,h),\ f_4(b,c,d,g,h)]$;

Видно, что при таких разбиениях, функция реализуется на ПЛИС настолько оптимально, насколько это возможно для данной функции. Недостатком данного метода является двухуровневость схемы, что приводит к увеличению времени ее срабатывания. Однако одним уровнем функция вообще не может быть реализована, а с применением других методов число уровней может быть значительно больше, чем два.

2. Методика декомпозиции.

Для предлагаемой декомпозиции справедлива следующая методика.

1. Аргументы исходной БФ разбиваются на минимальное количество непересекающихся групп с учетом ограничения числа входов КЛБ заданной ПЛИС:

$$F=F(x_1,x_2,\dots,x_N)=f_3[\ f_1\ (x_1,x_2,\dots,x_i);\ f_2(x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_N)\ ], \qquad (1)$$

где i=N/2.

2. Производится проверка на возможность такого разложения и, в случае положительного результата, производится и само разложение. В противном случае, необходимо вернуться к п.1 и выполнить разбиение аргументов иначе.

В зависимости от количества переменных исходной функции, проверка может быть сделана двумя способами.

В том случае, если аргументами функции являются не более пяти переменных, возможность разложения можно легко оценить при помощи карт Карно. Для этого на карту Карно с исходной функцией поочередно накладываются шаблонные карты, заполненные особым образом. Необходимо при помощи шаблонов покрыть карту таким образом, чтобы заданная БФ была однозначно определена пересечением нулей и единиц двух или более шаблонов. На рисунке 1.1 приведены шаблоны для разложения БФ от трех переменных на функции f_1=F(a) и f_2=F(b,c), на рисунке 1.2, соответственно, на функции f_1=F(b) и f_2=F(a,c), а на рисунке 1.3 - f_1=F(c) и f_2=F(a,b). Обведенные области соответствуют единицам. При наложении шаблонов используются только те области, которые покрывают единицы на карте исходной функции.

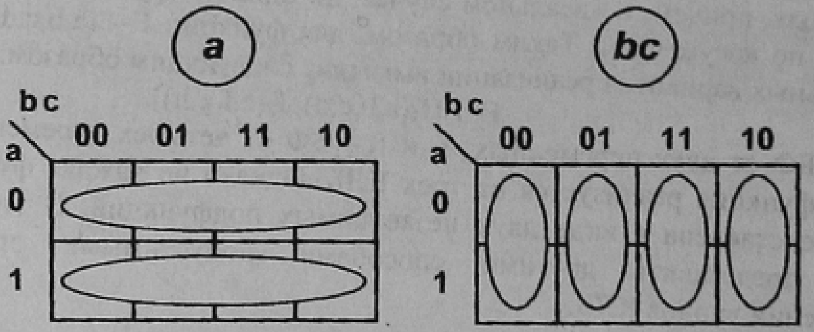

Рисунок 1.1 - Шаблоны для разложения по a,bc

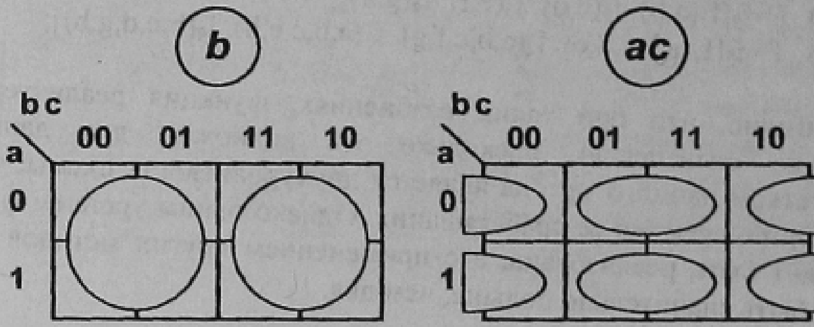

Рисунок 1.2 - Шаблоны для разложения по b,ac

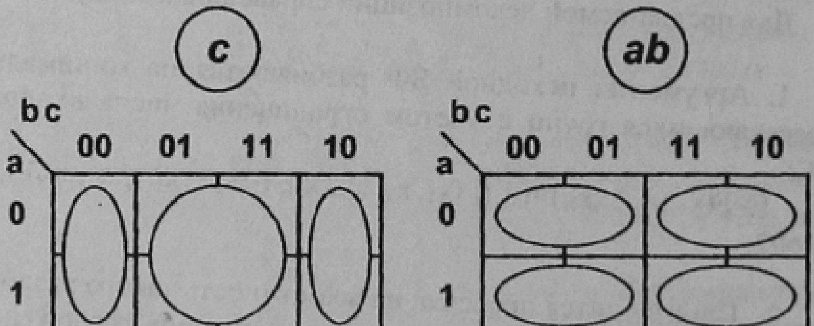

Рисунок 1.3 - Шаблоны для разложения по c,ab

Шаблоны можно применять не только попарно, как приведено на рисунках, но и в любом сочетании. Так, например, если функция не разложилась ни по одной паре шаблонов, можно попробовать применить такие комбинации, как: ab+bc, ab+ac, ac+bc. Применение более двух шаблонов не имеет смысла для БФ трех переменных, так как это приведет к ее представлению в виде функции трех аргументов. Авторами экспериментально доказано, что из всех 256-ти БФ трех переменных, только 152 функции представляются в виде функций от одной и двух переменных и 232 от двух и двух. Оставшиеся 24 БФ, не поддающиеся такому разложению, можно разбить на две группы термов СДНФ или СКНФ, то есть на две разлагаемые функции, и применить шаблонное разбиение для каждой из них. Сложнее обстоит дело с разбиением БФ от четырех и более переменных. Как показали исследования, из 65536-ти функций, только 1208 могут быть представлены в виде двух функций, каждая от независимой пары переменных и 51568 в виде двух функций, каждая от трех переменных, допускающих частичное пересечение по одной переменной.

Возможность разбиения функции от большого числа переменных можно проверить при помощи разложения Шеннона и следующего анализа. Пусть задана функция $F=F(x_1, x_2,\dots, x_N)$. Для проверки отделяемости от функции группы переменных $x_1, x_2,\dots, x_i$ запишем:

$$F = f_1(x_1,x_2,\dots,x_i)\,\&\,f_1'(x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_N) \vee f_2(x_1,x_2,\dots,x_i)\,\&\,f_2'(x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_N) \vee$$
$$\vee \dots \vee f_K(x_1,x_2,\dots,x_i)\,\&\,f_K'(x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_N),$$

где:

$f_1', f_2',\dots, f_K'$ - функции, полученные в результате подстановки в БФ F значений переменных $x_1, x_2,\dots, x_i$, $K=2^i$, а функции $f_1, f_2,\dots, f_K$ представлены таблицей истинности:

x_1 x_2 ... x_{i-1} x_i	f_1 f_2 f_3 ... f_{K-1} f_K
0 0 ... 0 0	1 0 0 ... 0 0
0 0 ... 0 1	0 1 0 ... 0 0
0 0 ... 1 0	0 0 1 ... 0 0
. . .	. . .
1 1 ... 1 0	0 0 0 ... 1 0
1 1 ... 1 1	0 0 0 ... 0 1

Очевидно, что функции $f_1, f_2,\dots, f_K$ обладают следующими свойствами:

$$f_1 \vee f_2 \vee f_3 \vee \dots \vee f_{K-1} \vee f_K = 1, \quad (2)$$

$$f_1\,\&\,f_2\,\&\,f_3\,\&\dots\&\,f_{K-1}\,\&\,f_K = 0. \quad (3)$$

из этого следует:

$$f_1 \vee f_2 \vee f_3 \vee \dots \vee f_{K-1} = \overline{f_K},$$

....

$$f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_i = \overline{f_{i+1} \vee \dots \vee f_{K-1} \vee f_K}.$$

Таким образом, дизъюнкция любой группы функций $f_1, f_2,\dots, f_K$ равна инверсии дизъюнкции остальной части функций. Из этого можно сделать следующий вывод. Разложение $F = F_3\left[F_1(x_1, x_2, ..., x_i), F_2\,(x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_N)\right]$ имеет место, если множество функций $f_1^{'}, f_2^{'}, ..., f_K^{'}$ можно разбить на два подмножества любой размерности таким образом, что:

1. В первом подмножестве все элементы равны, во втором – равны нулю.
2. В первом подмножестве все элементы равны, во втором – равны единице.
3. В первом подмножестве все элементы равны, во втором все элементы взаимоинверсны элементам первого множества.
4. Элементы обоих подмножеств равны.

Разбиение получается после вынесения общих сомножителей за скобки и заменой одной из групп функций $f_1, f_2, ..., f_K$ инверсией другой группы. В результате всегда получается функция от двух аргументов, что, в принципе, и требуется.

3. Пример применения методики декомпозиции.

Пример 1. Декомпозиция при помощи карт Карно.

Пусть БФ F=F(a,b,c) задана ДНФ: $F = \bar{a}c \vee a\bar{b}\bar{c} \vee bc$. Построим для нее карту Карно:

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	1	0

Сразу видно, что разложение можно осуществить при помощи шаблонов, представленных на рисунке 1.3:

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	1	0

Таким образом: $f_1(ab) = a\bar{b}$, $f_2(c) = c$. Функция f_3=F зависит от аргументов f_1, f_2 и находится по таблице истинности:

f_1 f_2	f_3
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

Следовательно, можно записать: $F = f_3 = f_1 \oplus f_2 = a\bar{b} \oplus c$.

Пример 2. Декомпозиция при помощи разложения Шеннона.

Пусть БФ F=F(a,b,c,d) задана ДНФ: $F = \bar{a}bd \vee bcd \vee a\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{b}\bar{c}$. Выполним разложение Шеннона по переменным a,b:

$F = f_1 \& 0 \vee f_2 \& d \vee f_3 \& \bar{c} \vee f_4 \& (cd \vee \bar{c}\bar{d})$.

Таким образом:

$f_1^{'} = 0, f_2^{'} = d, f_3^{'} = \bar{c}, f_4^{'} = cd \vee \bar{c}\bar{d}$, поэтому декомпозиция по аргументам a,b не может быть выполнена для этой функции.

Выполним разложение Шеннона по переменным a,c:

$F = f_1 \& bd \vee f_2 \& bd \vee f_3 \& (\bar{b} \vee \bar{d}) \vee f_4 \& bd$.

Таким образом:

$f_1^{'} = bd, f_2^{'} = bd, f_3^{'} = \bar{b} \vee \bar{d} = \overline{bd}, f_4^{'} = bd$, то есть $f_1^{'} = f_2^{'} = f_4^{'} = \overline{f_3^{'}}$, поэтому декомпозиция по аргументам a,c имеет место для этой функции:

$$F = f_1 \& f_1^{'} \vee f_2 \& f_2^{'} \vee f_3 \& f_3^{'} \vee f_4 \& f_4^{'} = f_1 \& \overline{f_3^{'}} \vee f_2 \& \overline{f_3^{'}} \vee f_3 \& f_3^{'} \vee f_4 \& \overline{f_3^{'}} =$$
$$\overline{f_3^{'}} \& (f_1 \vee f_2 \vee f_4) \vee f_3^{'} \& f_3 = \overline{f_3^{'}} \& \overline{f_3} \vee f_3^{'} \& f_3 = \overline{f_3^{'} \oplus f_3} = \overline{\overline{bd} \oplus a\bar{c}} = bd \oplus a\bar{c}.$$

Заключение

Исследования авторов показали, что предлагаемые методы декомпозиции дают возможность реализации БФ с большим числом аргументов на любых ПЛИС наиболее оптимально, чем при использовании других методов. Поскольку результатом декомпозиции являются функции с минимальным числом общих аргументов, то функция может быть реализована при помощи нескольких ПЛИС. Данные методы, независимо от сложности функции всегда приводят к двухуровневой реализации на КЛБ. Следовательно, быстродействие полученной схемы максимально возможное.

Литература

1. Скляров В.А. Синтез автоматов на матричных БИС. – Мн.: Наука и техника, 1984.-287с.
2. Закревский А.Д. Логический синтез каскадных схем. М., 1981.
3. Логическое проектирование БИС / Под ред. В.А. Мищенко. М., 1984.
4. Баркалов А.А., Аль-Бахри А.М., Зеленева И.Я. Классификация методов оптимизации устройств управления на программируемых БИС. //Наукові праці ДонДТУ. Серія «Проблеми моделювання та автоматизації проектування динамічних систем». Вип.10 –Д.1999, с.265.

Поступила в редакційну колегію 1. 11.2001 р.