ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ НЕИСПРАВНОСТИ ДИСКРЕТНОГО УСТРОЙСТВА

Барашко А.С.
Кафедра ПМИ ДонНТУ

Abstract

Barashko A.S. Function estimations of the fault detection probability of digital device. *It is deduced a formula for calculation of the fault detection probability of synchronous sequential circuit (SSC) as function of the random test length. The lower and asymptotical estimations of this function are found and they for specific SSC are calculated.*

Введение

Данная статья посвящена методу случайного сравнительного тестирования, представляющему собой наиболее простой подход к проблеме генерации тестов для определения исправности дискретных устройств. При детерминированном подходе, таком как *D*-алгоритм, тестовый вектор генерируется для обнаружения фиксированной неисправности и затем проводится моделирование для выявления других неисправностей, обнаруживаемых данным вектором. Поэтому естественной является идея [1 – 5] генерировать тестовый вектор случайным образом.

При определении полноты теста дискретного устройства чаще всего пользуются троичным моделированием. В работе [6] изучен класс неисправностей, обнаружимых при троичном моделировании и установлена трудоемкость их обнаружения, измеряемая функцией вероятности обнаружения от длины случайной последовательности наборов, генерируемых стационарным источником независимых случайных сигналов с заданным распределением этих сигналов.

В данной работе выведены формулы, которые в [6] приведены без доказательства, и найдены функция вероятности обнаружения неисправности, ее нижняя и асимптотическая оценка для конкретной синхронной последовательностной схемы (СПС).

1. Вывод формул

В [6] показано, что случайный процесс обнаружения неисправности СПС описывается поглощающей цепью Маркова с одним начальным и одним поглощающим состоянием. Все понятия, касающиеся конечных цепей Маркова, заимствованы из [7]. Упомянутая цепь строится по системе уравнений выходов и переходов [8] исправной и неисправной

СПС, а также по распределению вероятностей независимых случайных сигналов.

Пусть состояния поглощающей цепи пронумерованы натуральными числами $1,2,\ldots,r$, где 1 соответствует поглощающему, а r – начальному состоянию. Тогда каноническая форма матрицы переходов $P=[p_{ij}]$ поглощающей цепи будет иметь вид

$$P=\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ R & Q \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{0}$ – вектор-строка, состоящая из $r-1$ нулей; R – вектор-столбец размерности $r-1$, соответствующий $r-1$ невозвратным состояниям; Q – $(r-1)\times(r-1)$-матрица, описывающая поведение процесса до выхода из множества невозвратных состояний. Условимся цепь, определяемую матрицей переходов P, также обозначать P.

Через $q(n)$ обозначим вероятность обнаружения неисправности, для которой построена поглощающая цепь, случайным тестом длины n. Поскольку цепь P попадает в поглощающее состояние 1 в тот момент, когда происходит обнаружение случайным тестом фиксированной неисправности, то

$$q(n)=p_{r1}^{(n)}, \tag{1}$$

где $p_{r1}^{(n)}$ - элемент $(r,\,1)$ матрицы $P^{\,n}$.

Покажем, как вычисляются математическое ожидание и дисперсия случайной величины, равной длине случайного теста, обнаруживающего зафиксированную неисправность. Пусть t – случайная величина, равная числу шагов марковского процесса, стартующего в состоянии r, до поглощения. Математическое ожидание $M(t)$ и дисперсия $D(t)$ случайной величины t могут быть вычислены с помощью фундаментальной матрицы N поглощающей цепи P. Матрица N определяется равенствами

$$N=(I-Q)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}Q^k, \tag{2}$$

где I – единичная матрица порядка $r-1$. Через ξ обозначим вектор-столбец размерности $r-1$, каждая компонента которого равна 1, и для произвольной матрицы A символом $A_{i\bullet}$ обозначим i – ю строку этой матрицы. Полагая $\tau=N\xi$, на основании [1] находим

$$M(t)=N_{(r-1)\bullet}\xi, \tag{3}$$

$$D(t)=(2N_{(r-1)\bullet}-(0,\ldots,0,1)\tau-(N_{(r-1)\bullet}\xi)^2. \tag{4}$$

Используя равенство (3), из (4) получаем формулу для вычисления дисперсии

$$D(t)=2N_{(r-1)\bullet}\tau-M(t)(1+M(t)). \tag{5}$$

Применяя неравенство Чебышева, по $M(t)$ и $D(t)$ можно найти нижнюю границу функции вероятности обнаружения неисправности $q(n)$. Для случайной величины t и произвольного $\varepsilon > 0$ неравенство Чебышева имеет вид

$$P(|t - M(t)| < \varepsilon) \geq 1 - D(t)/\varepsilon^2. \tag{6}$$

Для $n > 2M(t)$ положим $\varepsilon = n - M(t)$. Справедлива следующая цепочка равносильностей:

$$|t - M(t)| < n - M(t) \Leftrightarrow M(t) - n < t - M(t) < n - M(t) \Leftrightarrow 2M(t) - n < t < n \Leftrightarrow t < n.$$

Учитывая, что $q(n)=P(t<n)$, для $n>2M(t)$ из (6) находим

$$q(n) \geq 1 - \frac{D(t)}{(n - M(t))^2}. \tag{7}$$

Неравенство (7) будет нетривиальным при $D(t)/(n - M(t))^2 < 1$, т.е. при $n > M(t) + \sqrt{D(t)}$. Таким образом, нижняя граница функции $q(n)$, определяемая неравенством (7), имеет место при $n > \max(2M(t), M(t) + \sqrt{D(t)})$.

Для получения дальнейших результатов, связанных с анализом процесса, описываемого поглощающей цепью P, применим теорию эргодических цепей. Превратим рассматриваемый процесс в новый процесс следующим образом. Пусть $\pi = (0,...,0,1)$ – начальное распределение в исходном процессе, и пусть каждый раз, когда этот процесс достигает поглощающего состояния, он начинается опять с тем же начальным распределением π. Тогда получается снова цепь Маркова с переходной матрицей

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & 0...01 \\ R & Q \end{bmatrix},$$

которая согласно [7] представляет эргодическую цепь. Для эргодической цепи существует единственный стохастический вектор $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_r)$, удовлетворяющий равенству $\alpha P' = \alpha$. Для $1 \leq i \leq r$ компонента α_i вектора α представляет предельную частоту попадания цепи P' в состояние i. Рассмотрим случайную величину $\beta_i^{(n)}$, равную числу попаданий цепи P' в состояние i за n шагов, если случайный процесс стартует в состоянии r (с начальным распределением π). Для эргодической цепи существует предельная дисперсия b_i случайной величины $\beta_i^{(n)}$, которая связана с дисперсиями $D(\beta_i^{(n)})$ равенством $b_i = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{D(\beta_i^{(n)})}{n}$. Пусть $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - функция Лапласа и x_1, x_2 – такие действительные числа, что $x_1 < x_2$. Центральная предельная теорема для цепей Маркова дает асимптотическую оценку вероятности попадания случайной величины $\frac{\beta_i^{(n)} - n\alpha_i}{\sqrt{nb_i}}$ в интервал $[x_1, x_2]$, а именно:

$$P(x_1 \leq \frac{\beta_i^{(n)} - n\alpha_i}{\sqrt{nb_i}} \leq x_2) \to \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \text{ при } n \to \infty. \tag{8}$$

Из определения цепи P' следует, что $q(n)=P(\beta_1^{(n)}\ge 1)$, а асимптотическую оценку вероятности $P(\beta_1^{(n)}\ge 1)$ можно получить, используя соотношение (8). В самом деле,

$$P\left(x_1\le \frac{\beta_i^{(n)}-n\alpha_i}{\sqrt{nb_i}}\le x_2\right)=P(x_1\sqrt{nb_1}+n\alpha_1\le \beta_1^{(n)}\le x_2\sqrt{nb_1}+n\alpha_1).$$

Полагая $x_1=\dfrac{1-n\alpha_1}{\sqrt{nb_1}}$ и $x_2=\infty$, находим

$$q(n)\to \frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{1-n\alpha_1}{\sqrt{nb_1}}\right) \text{ при } n\to\infty. \tag{9}$$

Значения α_1 и b_1 можно найти путем достаточно громоздких вычислений по матрице P'. В самом деле, α_1 находится из системы уравнений $\alpha P'=\alpha$ и условия стохастичности вектора α. Для нахождения b_1 нужно найти фундаментальную матрицу $Z=[z_{ij}]=(I-(P'-\xi\alpha))^{-1}$ эргодической цепи P' и воспользоваться формулой

$$b_1=2\alpha_1 z_{11}-\alpha_1-\alpha_1^2. \tag{10}$$

Однако, эти же значения α_1 и b_1 можно получить, используя $M(t)$ и $D(t)$, которые определены равенствами (3) и (5). Выведем соответствующие формулы.

Пусть t_{ij} $(1\le i,\ j\le r)$ – случайная величина, равная числу шагов марковского процесса цепи P', за которое впервые достигается состояние j из состояния i. Из определения цепи P' следует, что $t=t_{r1}=t_{11}-1$. Поэтому $M(t)=M(t_{11})-1$. В соответствии с [7] $M(t_{11})=\dfrac{1}{\alpha_1}$ и, следовательно,

$$\alpha_1=\frac{1}{1+M(t)}. \tag{11}$$

Из [7] следует, что $D(t_{11})=2z_{11}/\alpha_1^2-1/\alpha_1-1/\alpha_1^2$, а так как $D(t)=D(t_{r1})=D(t_{11})$, то учитывая (10), находим

$$\frac{b_1}{\alpha_1^3}=\frac{2z_{11}}{\alpha_1^2}-\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_1^2}=D(t). \tag{12}$$

Подставляя в (12) значение α_1 из (11), получаем

$$b_1=\frac{D(t)}{(1+M(t))^3}. \tag{13}$$

Соотношения (9), (11) и (13) позволяют получить следующую асимптотическую оценку вероятности:

$$q(n)\approx \frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{(1+M(t)-n)\sqrt{1+M(t)}}{\sqrt{nD(t)}}\right) \tag{14}$$

при достаточно больших n.

2. Вычисление оценок для конкретной схемы

СПС согласно [8] может быть задана системой уравнений выходов и переходов

$$\left.\begin{aligned} z_i &= z_i(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_s), i=1,\dots,r;\\ y'_j &= y'_j(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_s), j=1,\dots,s. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

В векторной форме систему (15) можно записать в следующем виде:

$$z = z(x,y), y' = y'(x,y), \quad (16)$$

где $z=(z_1,\dots,z_r), x=(x_1,\dots,x_m), y=(y_1,\dots,y_s), y'=(y'_1,\dots,y'_s)$.

При троичном моделировании СПС уравнения системы (15) рассматриваются не как двоичные, а как троичные функции [9]. Третье значение, обозначаемое ½, используется для представления неопределенного сигнала, который может быть либо 0, либо 1.

Предположим, что неисправности СПС не меняют ее структуры, а могут изменить лишь функции z_i и y'_j, так что СПС, заданная уравнениями (16), в результате фиксированной неисправности становится схемой, которая описывается следующей системой уравнений:

$$Z = Z(x,Y), Y' = Y'(x,Y), \quad (17)$$

где Z, Y, Y' имеют размерности r, s и s соответственно.

В [6] показано, что по уравнениям (16) и (17) можно построить конечный инициальный автомат и по нему проверить, является ли фиксированная неисправность обнаружимой при троичном моделировании. В случае, когда неисправность обнаружима, по автомату и фиксированному распределению вероятностей входных сигналов можно построить поглощающую цепь Маркова, для которой выведены формулы в предыдущем разделе.

Рассмотрим СПС, заданную следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= x\bar{y}_1 y_2 \vee \overline{x}\overline{y}_2 \vee y_1\bar{y}_2,\\ y'_2 &= xy_1\bar{y}_2,\\ z &= xy_1. \end{aligned}\right\}. \quad (18)$$

Предположим, что неисправная СПС определяется системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} Y'_1 &= xY_2 \vee \bar{x}\overline{Y}_2 \vee Y_1\overline{Y}_2,\\ Y'_2 &= xY_1\overline{Y}_2,\\ Z &= xY_1. \end{aligned}\right\}. \quad (19)$$

Используя [6], по системам уравнений (18) и (19) построим инициальный конечный автомат без выходов A, задав его следующей таблицей переходов (таб. 1).

Поскольку состояние ν достижимо из начального состояния ½ ½ ½ ½, то зафиксированная неисправность является обнаружимой при троичном моделировании.

Пусть на входе СПС действует источник случайных сигналов с одинаковыми вероятностями появления 0 и 1, равными 0,5.

Таблица 1. Автомат *A*

$y_1y_2Y_1Y_2$	x = 0	x = 1
½ ½ ½ ½	½ 0 ½ 0	½ ½ ½ ½
½ 0 ½ 0	1 0 1 0	½ ½ ½ ½
1 0 1 0	1 0 1 0	1 1 1 1
1 1 1 1	0 0 0 0	0 0 1 0
0 0 0 0	1 0 1 0	0 0 0 0
0 0 1 0	1 0 1 0	ν
ν	ν	ν

Занумеруем состояния автомата *A* следующим образом: ν - 1, 0 0 1 0 – 2, 0 0 0 0 – 3, 1 1 1 1 – 4, 1 0 1 0 – 5, ½ 0 ½ 0 – 6, ½ ½ ½ ½ - 7.

Тогда автомату *A* будет соответствовать поглощающая цепь Маркова, заданная канонической формой матрицы переходов $P = [p_{ij}]$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Согласно (1) функция вероятности обнаружения зафиксированной неисправности СПС определяется равенством $q(n) = p_{71}^{(n)}$. Значения этой функции для некоторых длин случайного теста приведены в таблице 2.

Таблица 2. Значения функции вероятности

n	20	40	60	80	100
$q(n)$	0,53	0,89	0,96	0,98	0,99

Теперь приступим к нахождению математического ожидания *M(t)* и дисперсии *D(t)* длины случайного теста, обнаруживающего зафиксированную неисправность. Для данного примера матрица *Q* получается из матрицы *P* путем вычеркивания первой строки и первого столбца. Находим фундаментальную матрицу N поглощающей цепи по формуле (2)

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 8 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Используя формулы (3) и (5), вычисляем $M(t) = 24$ и $D(t) = 296$.

Нижняя граница функции $q(n)$ вычисляется по формуле (7), которая справедлива для $n > \max(2M(t), M(t) + \sqrt{D(t)})$. В нашем случае длина теста n должна превышать 48. Обозначая правую часть неравенства (7) через $q_{\min}(n)$, находим значения этой функции для некоторых длин случайного теста, представленных в таблице 3.

Таблица 3. Нижняя граница функции вероятности

n	50	60	80	100	120	140	160	180	200
$q_{\min}(n)$	0,56	0,77	0,91	0,95	0,97	0,98	0,984	0,988	0,99

Асимптотическая оценка функции вероятности обнаружения может быть найдена по формуле (14). Обозначая правую часть соотношения (14) через $q_{as}(n)$, получаем значения этой функции для некоторых n, показанных в таблице 4.

Таблица 4. Асимптотика функции вероятности

n	40	60	80	100	120
$q_{as}(n)$	0,75	0,91	0,96	0,98	0,99

Выводы

Проведенное исследование показывает, что точный подсчет значений функции вероятности обнаружения фиксированной неисправности СПС является слишком громоздким и для реальных схем практически невыполним. Однако с реальной неисправной схемой можно провести статистические эксперименты с целью нахождения статистических оценок матожидания $M(t)$ и дисперсии $D(t)$. По найденным оценкам с использованием формул (7) или (14) могут быть найдены оценки функции $q(n)$.

Литература

1. Abramovici M., Miller D.T. Are random vectors useful in test generation? // Proc. 1-st Eur. Test Conf. – Paris, Apr., 1989. – P. 22 – 25.
2. Chin C.K., McCluskey E.J. Test length for pseudorandom testing // IEEE Trans. Comput. – 1987. – Vol.C-36, №2. – P. 252 – 256.
3. David R., Fuentes A. Fault diagnosis of RAM's from random testing experiments // IEEE Trans. Comput. – 1990. – Vol. 39, №2. – P. 220 – 229.
4. Narraway J.J., Weimin M. Probabilistic diagnosis in multiprocessor system // Microprocess. and Microprogram. – 1990. – Vol. 28, №1-5. – P. 75 – 78.
5. Wunderlich H. The design of randomtestable sequential circuits // 19-th Int. Symp. Fault-Tolerant Comput. – Urbana, 1989. – P. 110 – 117.
6. Барашко А.С., Черевко Н.В. Некоторые способы оценки длины случайного теста // Теория и моделирование управляющих систем.– К.: Наук. Думка, 1989. – С. 10 – 15.
7. Кемени Д.Д., Снелл Д.Л. Конечные цепи Маркова. – М.: Наука, 1970. – 271 с.
8. Миллер Р. Теория переключательных схем: В 2 т. – М.: Наука, 1971. – Т2. – 304 с.
9. EichelbergerE.B. Hazard detection in combinational and sequential switching circuits // IBM J. Res. and Develop. – 1965. – Vol. 9, №2. – P. 90 – 99.

Дата надходження до редакції 30.04.2005 р.