РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ ПРЯМЫХ В КРУГОВЫХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Труб И.И., Шозда Н.С.
кафедра ПМиИ ДонГТУ
E-mail: trub@pmi.donetsk.ua
shozda@pmi.donetsk.ua

Abstract

Trub I., Shozda N.. Method of lines for partial elliptic equations on polar and elliptic coordinates. *This article contains implementation of numerical method for elliptic partial equations by reducing to ordinary differential equations system. The technique of such reducing for non-rectangle domains is developed. The final expressions for calculation are derived. Approximation and stability of proposed method are also under consideration on article.*

Введение

Одна из трудностей решения эллиптических краевых задач связана с видом пространственной или плоской области: на которой ищется решение задачи. Формирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений в методе прямых сравнительно легко реализуется лишь для задач, решение которых ищется в прямоугольных областях. Однако совершенно неочевиден этот процесс для краевых задач Дирихле, Неймана, третьей краевой задачи, когда краевые условия заданы на некотором криволинейном контуре или криволинейной поверхности.

Рассмотрим предлагаемый подход к решению этого класса задач. Прежде всего предполагается введение криволинейных координат. Смысл этого состоит в следующем: одна из введенных координат должна сохранять на границе области постоянное значение, а сама область в новой системе координат преобразуется в прямоугольную.

Разберем решение краевых задач для круга и для эллипса, из чего станет ясна идея метода.

1. Решение задач в полярных координатах.

Разберем наиболее простой случай - решение задачи Дирихле в круге.
Постановка задачи:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x,y) \qquad U_{x^2+y^2=R^2} = \Gamma(x,y)$$

Вводим полярные координаты $x = \rho \cdot \cos\varphi$, $y = \rho \cdot \sin\varphi$.
Координатные линии - окружности (ρ = const) и прямые (φ = const). Исходное уравнение в этих координатах запишется так:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = f_1(\rho,\varphi) \qquad U_{\rho=R} = \Gamma_1(\varphi)$$

Область, в которой ищется решение, примет прямоугольную форму рис. 1. Прообразом отрезка [0; 2π] является единственная точка - центр круга. На отрезке [(R; 0); (R; 2π)] имеем заданной искомую функцию.

Прямоугольник разбиваем на части прямыми, параллельными оси ρ. Аппроксимируя вторую производную по φ, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Например, изображению на рис. 1 соответствует следующая система ОДУ:

$$y_0''=-\frac{1}{\rho}\ y_0' - \frac{y_1+y_7-2y_0}{\rho^2 h^2}+\Gamma_1(\varphi_0)$$

$$y_1''=-\frac{1}{\rho}\ y_1' - \frac{y_0+y_2-2y_1}{\rho^2 h^2}+\Gamma_1(\varphi_1)$$

$$y_2''=-\frac{1}{\rho}\ y_2' - \frac{y_1+y_3-2y_2}{\rho^2 h^2}+\Gamma_1(\varphi_2)$$

. . .

$$y_7''=-\frac{1}{\rho}\ y_7' - \frac{y_0+y_6-2y_7}{\rho^2 h^2}+\Gamma_1(\varphi_7)$$

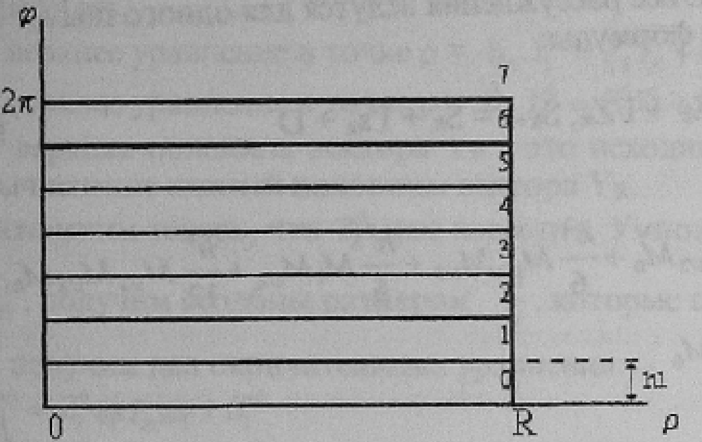

Рис.1. Вид круговой области в полярных координатах

При составлении первого и последнего уравнений происходит выход за границы прямоугольника, при этом использовано условие периодичности по φ. Удвоив число уравнений, перейдем к системе первого порядка:

$$y_0' = y_8$$

$$y_1' = y_9$$

. . .

$$y_7' = y_{15}$$

$$y_8'=-\frac{1}{\rho}\ y_8 - \frac{y_1+y_7-2y_0}{\rho^2 h_1^2}+\Gamma_1(\varphi_0)$$

. . .

$$y_{15}'=-\frac{1}{\rho}\ y_{15} - \frac{y_0+y_6-2y_7}{\rho^2 h_1^2}+\Gamma_1(\varphi_7)$$

где y_0 ..y_7 - функции от ρ, заданные на параллельных прямых φ = const, y_8,..y_{15} - их производные по ρ, y_0 ..y_7 заданы на правой стороне прямоугольника при ρ = R. Однако в таком виде задача неопределена, т.к. половина начальных условий неизвестна. Другими словами, необходимо знать значение производных $\frac{\partial y_i}{\partial \rho}$ на границе ρ = R.

Зададим вектор Y_R ($y_0,\ldots,y_{n/2-1}$ - функции, $y_{n/2},\ldots,y_{n-1}$ - их первые производные, n - общее число уравнений) в точке $\rho = R$.

Будем пока считать, что и значения верхней половины этого вектора неизвестны. Выбрав шаг h ($h<0$) вдоль оси ρ, и, применив схему Рунге- Кутта, например, четвертого порядка, можно выразить вектор значений искомых функций в точке $\rho=0$ через вектор их значений в точке $\rho = R$. Опишем выполнение этой процедуры.

На каждом шаге вдоль оси ρ нужно иметь матричное уравнение

$$Y_K = Z_K Y_R + S_K$$

где Y_K - вектор неизвестных в очередной точке вдоль оси ρ (k-й шаг), Z_K - матрица n:n, S_K - столбец n:1, Y_R - столбец неизвестных в точке $\rho = R$. Наша цель - получить матричные формулы, связывающие Z_K и S_K сZ_{K+1} и S_{K+1}, т.е. найти рекуррентную зависимость. Введем обозначения.

Пусть M - функциональная матрица системы ОДУ, B - столбец правой части.. Далее, M_{0k} - матрица M на k - ом шаге, $M_{0k} = M(\rho_k)$; $M_{1/2k} = M(\rho_k + h/2)$; $M_{1k} = M(\rho_k + h)$. То же для обозначений B_{0k}, $B_{1/2k}$, B_{1k} .В дальнейшем индекс k при M и B опущен, т.к. все рассуждения ведутся для одного шага.

Итак, представляем искомые формулы:

$$Y_K = Z_K Y_R + S_K,\ Z_{k+1} = Z_k = Z_k + \Gamma Z_k,\ S_{k+1} = S_k + \Gamma s_k + D \tag{1}$$

где Г - матрица, D - столбец.

$$\Gamma = \frac{h}{6}M_0 + \frac{2}{3}hM_{1/2} + \frac{h}{6}M_1 + \frac{h^2}{6}M_{1/2}M_0 + \frac{h^2}{6}M_{1/2}M_{1/2} + \frac{h^2}{6}M_1M_{1/2} + \frac{h^3}{12}M_{1/2}M_{1/2}M_0 +$$
$$+\frac{h^3}{12}M_1M_{1/2}M_{1/2} + \frac{h^4}{24}M_1M_{1/2}M_{1/2}M_0$$

(2)

$$D = \frac{h}{6}B_0 + \frac{2}{3}hB_{1/2} + \frac{h}{6}B_1 + \frac{h^2}{6}M_{1/2}B_0 + \frac{h^2}{6}M_{1/2}B_{1/2} + \frac{h^2}{6}M_1B_{1/2} + \frac{h^3}{12}M_{1/2}M_{1/2}B_0 +$$
$$+\frac{h^3}{12}M_1M_{1/2}B_{1/2} + \frac{h^4}{24}M_1M_{1/2}M_{1/2}B_0$$

В начальной точке $\rho = R$ Z - единичная матрица, S - столбец из одних нулей. Вывод формул здесь опущен. Получены они на основании схемы Рунге - Кутта. Реализовав формулы, получим уравнение

$Y_1 = Z_1 Y_R + S_1$

в точке $\rho = -h$. При переходе из нее в точку $\rho=0$ возникает особенность. Прежде чем говорить о ней, заметим следующее.

Разделим наше матричное уравнение на верхнюю и нижнюю половины

$$\begin{matrix} Y_1^0 \\ Y_1^1 \end{matrix} = \begin{matrix} Z_1^0 \\ Z_1^1 \end{matrix} \bullet \begin{matrix} Y_R^0 \\ Y_R^1 \end{matrix} + \begin{matrix} S_1^0 \\ S_1^1 \end{matrix} -$$

Верхняя половина вектора Y_1 - вектор самих функций в точке $\rho = h$, нижняя половина - вектор их производных в этой точке, причем

$Y_1^0 = Z_1^0 Y_R + S_1^0$, Z_1^0 - матрица $\frac{n}{2}:n$, Y_R - столбец $n:1$, Y_1^0, S_1^0 - столбцы $\frac{n}{2}:1$. Назовем это матричное уравнение верхним.

Особенность состоит в следующем. При переходе из $\rho = -h$ в $\rho = 0$ при вычислении матрицы M_1 (ее аргумент $\rho+h = 0$) в нижней половине этой матрицы возникает деление на ноль. Но в силу определенных причин, которые будут ясны в дальнейшем, нас будет интересовать только верхнее уравнение в соотношении

$Y_0 = Z_0Y_R+S_0$ (в точке $\rho = 0$).

Для этого достаточно вычислить только верхнюю половину матрицы Z_0, т.е. в формулах (1) и (2) при их последнем использовании нужны только верхние половины всех матричных слагаемых. Умножение матриц обладает свойством дистрибутивности. Поэтому, чтобы в матрице $M= M_1M_2...M_n = M1(M_2...M_n)$ вычислить верхнюю половину, необходимо знать полностью матрицы M_2, ..., M_n, а для матрицы - первого сомножителя достаточно знать только ее верхнюю половину. В формулах (1) и (2) матрица M_1 присутствует только в качестве первого сомножителя, следовательно, при вычислении верхней половины Z_0 и S_0 нужна только верхняя половина матрицы M_1, а нижняя, где возникает деление на ноль, нас не интересует. Подведем некоторые итоги. Имеется:

- верхнее уравнение в точке $\rho = -h$, $Y_1^0 = Z_1^0 Y_R + S_1^0$
- верхнее уравнение в точке $\rho = 0$, $Y_0^0 = Z_0^0 Y_R + S_0^0$
- верхняя половина вектора Y_R - это исходные краевые условия. Наша цель-вычисление нижней половины вектора Y_R.

Вспомним теперь, что Y_R^0 нам известно. Умножим левую половину Z_1^0 и Z_0^0 на Y_R^0, получим столбцы размером $\frac{n}{2}$, которые сложим соответственно с S_1^0 и S_0^0 и получим два окончательных уравнения:

$$Y_1^0 = Z_{1\ \text{пр}}^0 Y_{R\ \text{иск}} + S_1^{*0} \tag{3}$$

$$Y_0^0 = Z_{0\ \text{пр}}^0 Y_{R\ \text{иск}} + S_0^{*0} \tag{4}$$

где $Z_{1\ \text{пр}}^0$ и $Z_{0\ \text{пр}}^0$ - матрицы $\frac{n}{2}:\frac{n}{2}$ - правые половины матриц Z_1^0 и Z_0^0, $Y_{R\ \text{иск}}$ - столбец искомых неизвестных - производных искомых функций в $\rho=R$, Y_1^0 и Y_0^0 - столбцы значений искомых функций в $\rho = -h$ и $\rho = 0$, S_1^{*0} и S_0^{*0} - некоторые столбцы.Далее следует заключительный этап. Используя тот факт, что в точке $\rho=0$ все функции равны между собой, можно получить из равенства (4) $n/2-1$ линейных уравнений с нулем в правой части вычитанием любых двух строк матрицы. Пользуясь условием $y_{\varphi=0} = y_{2n}$, исключаем одно неизвестное и получаем систему линейных алгебраических уравнений. Попарно вычитать строки можно, в принципе, в любом порядке, но для минимизации погрешности лучше вычитать только соседние строки, что соответствует соседним радиусам окружности, внутри которой ищется решение исходной задачи. Решать систему предпочтительнее методом Зейделя.

Разберем особый случай. Задача может быть абсолютно симметричной, как-то: однородная среда внутри области, одинаковое граничное условие для всех точек контура. В этом случае матрица СЛАУ, полученная так, как описано выше, будет вырожденной. Здесь предлагается следующее.

Если задача симметрична, искомая функция U достигает экстремума в центре круга. Отсюда имеем условие: $\frac{\partial U}{\partial \rho}(\rho=0)=0$, т.е. при достаточно малом шаге $Y_1=Y_0$. Из этого равенства мы также получаем СЛАУ ($Z_{1\,пр}$- $Z_{0\,пр}$) $Y_{R\ иск}$ + $+ S_1^{*0}$ - S_0^{*0} = 0 из $\frac{n}{2}$ уравнений с $\frac{n}{2}$ неизвестными, решив которую, найдем недостающие начальные условия.

Описанный метод применим также к задаче Неймана с краевым условием

$$\frac{\partial U}{\partial \eta / r} + U_r = f(x,y)$$

Используя краевое условие, выражаем верхнюю половину Y_R через компоненты его нижней половины, затем реализуем вышеописанный метод и, найдя нижнюю половину Y_R опять-таки из краевого условия получаем его верхнюю половину, завершая процесс отыскания недостающих начальных условий.

Приведем некоторые рекомендации по практическому применению метода:

- формулы (1) и (2), полученные по схеме Рунге- Кутта четвертого порядка, очень громоздки, требуют много машинного времени, и, что наиболее неприятно, накапливают вычислительную погрешность, связанную с ограниченностью разрядной сетки ЭВМ. Гораздо удобнее использовать формулы, основанные на схеме Рунге- Кутта второго порядка

$$Y_{k+1} = (Z_k + \Gamma \cdot Z_k) \cdot Y_k + S_k + \Gamma \cdot S_k + D$$

$$\Gamma = h \cdot M_{1/2} + \frac{h^2}{2} M_{1/2} M_0 \ , \qquad D = hB_{1/2} + h^2 M_{1/2} B_0$$

Как видим, здесь нет матрицы M_0, поэтому отпадает и особенность, связанная с делением на ноль в точке ρ=0;

- для аппроксимации второй производной по φ использована трехточечная схема $\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}$ Эта схема имеет погрешность с главным членом $\frac{h^2 \cdot \max\left|u^{IV}\right|}{12}$ Но в исходном ДУЧП перед $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$ стоит множитель $\frac{1}{\rho^2}$, а так как в процессе вычислений значение ρ приближается к нулю, погрешность аппроксимации с каждым шагом возрастает, и система ОДУ все менее точно аппроксимирует исходное ДУЧП. Эту погрешность можно существенно понизить, не уменьшая величины шага $|h|$, если использовать не трехточечную, а пятиточечную разностную аппроксимацию второй производной $\frac{1}{12h^2}(-U_{k+2} + 16U_{k+1} - 30U_k + 16U_{k-1} - U_{k-2})$ При этом несколько усложняется матрица системы ОДУ, из трехдиагональной превращаясь в пятидиагональную. Главный член погрешности будет иметь порядок $O(h^4)$.

- как уже отмечалось, погрешность при вычислениях создается погрешностью схемы Рунге- Кутта и погрешностью округления, причем вначале вычислений, в точках, удаленных от ρ=0 , главенствует первая, а в точках, близких к ρ=0, значительно выше вторая. Исходя из этого, есть смысл вести вычисления с переменным шагом по ρ, в простейшем случае изменить его один раз. В начале взять более мелкий шаг, а, дойдя до некоторого ρ_1, равного, например, 1/4 или 1/5, сделать последний шаг к ρ=0, равный $-\rho_1$.

Проведенные вычисления показали эффективность этого приема. В качестве примера бралась задача

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}=3\sin\varphi,\qquad U_{\rho=1}=\sin\varphi \text{ с точным решением } \quad U=\rho^2\sin\varphi$$

Симметричный случай просчитан на примере

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}=4e^{\rho^2}(\rho^2+1) \text{ с точным решением } U=e^{\rho^2}$$

2. Решение краевых задач в эллиптических координатах.

Постановка задачи:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=f(x,y)\qquad U_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}=\Gamma(x,y)$$

В общем случае преобразование к эллиптическим координатам осуществляется по формулам

$$x^2=\frac{(\rho+a^2)(\varphi+a^2)}{a^2-b^2}\qquad y^2=\frac{(\rho+b^2)(\varphi+b^2)}{b^2-a^2}$$

Для ясности изложения рассмотрим здесь только так называемые вырожденные эллиптические координаты $x=ch\rho\cdot\cos\varphi$, $y=sh\rho\cdot\sin\varphi$, которые соответствуют эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$ Координатные линии:

а) ρ=const - эллипсы

$$\frac{x^2}{ch^2\rho}-\frac{y^2}{sh^2\rho}=1\qquad 0\le\rho\le\ln(a+\sqrt{a^2-1})$$

Значение $\rho=\ln(a+\sqrt{a^2-1})$ соответствует граничному эллипсу.

б) φ=const - софокусные гиперболы

$$\frac{x^2}{\cos^{2\varphi}}-\frac{y^2}{\sin^{2\varphi}}=1\qquad 0\le\varphi\le2\pi$$

Оператор Лапласа в эллиптических координатах запишется так:

$$\frac{1}{ch^2\rho-\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\right)$$

Координатные линии эллиптической системы координат изображены на рис.2. Интервал [0; π.\2] соответствует ветвям гипербол, лежащих в первом квадранте, [π/2; π]- во втором квадранте и т.д. Каждая отдельно взятая ветвь гиперболы пересекает все эллипсы, каждый эллипс пересекает все ветви гипербол во всех квадрантах. Следовательно, на осях ρ и φ исходная эллиптическая область отображается на прямоугольник. Формируется система ОДУ, которую замыкает условие $U_0=U_{2\pi}$. Необходимо определить производные на гиперболах по ρ на границе области. Значения этих функций на границе известны. Ход вычислений:

- с помощью матричных прогоночных формул (а они такие же, как для круга) переходим в точку ρ=0. Это соответствует движению по гиперболам от границы области к отрезку [-1; 1]. Получаем уравнение $Y_0=Z_0Y_R+B_0$ В нем нам извес-

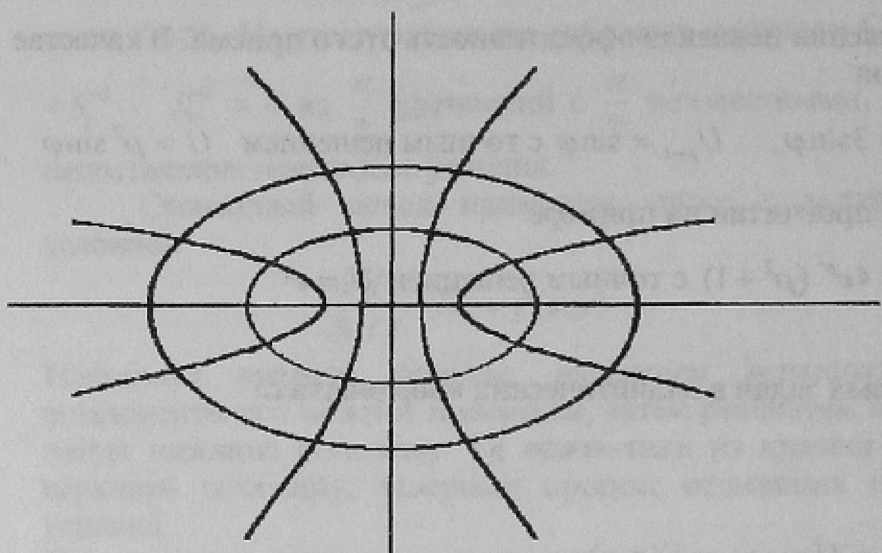

Рис.2. Кооридинатная сетка эллиптических координат

тны матрица Z_0 (n:n), столбец B_0 (n:1) и верхняя половина столбца Y_R, которую обозначим опять Y_R^0.

- в матрице Z_0 и столбце B_0 выделяем верхние $\frac{n}{2}$ строк. Среди них строки с номерами n_1 и n_2 назовем парными, если они соответсвуют двум ветвям одной гиперболы, симметричным относительно оси X, другими словами, функции $U_{\varphi=\varphi 1}$ соответствует функция $U_{\varphi=2\pi-\varphi 1}$

- выделив такие парные строки, в верхней половине матрицы Z_0 и столбца B_0 меняем их местами. Мы вправе это сделать, т.к. при ρ=0 симметричные относительно оси X ветви сходятся в одной точке, следовательно, функции $U_{\varphi=\varphi 1}$ и $U_{\varphi=2\pi-\varphi 1}$ в ρ=0 равны друг другу. Получаем модифицированное равенство

$$Y_0 = Z_0' Y_R + B_0' \qquad (5)$$

- осуществляем, взяв за исходное соотношение равенство (5), матричную прогонку в обратном порядке - от ρ=0 к $\rho = \ln(a + \sqrt{a^2 - 1})$ по тем же формулам, поменяв знак шага по ρ;

- в итоге получаем равенство $Y_R = Z_R^* Y_R + B_R^*$. Выделив верхние половины в матрице Z_R^*, столбце B_R^* ~~и столбце~~ Y_R, стоящем в левой части, получим СЛАУ для определения ~~нижней половины~~ Y_R, т.е. производных по ρ на границе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С.К. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1988
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989.