УДК 515.2

ТРИОРТОГОНАЛЬНІ СИСТЕМИ З КООРДИНАТНОЮ СІМ’ЄЮ ПЛОЩИН

Андрєєва В.В., аспірантка
Автомобільно-дорожній інститут Донецького національного технічного університету

Анотація **– пропонується три схеми формоутворення триортогональних систем, одна сім’я яких є сім'єю площин.**

Ключові слова **– триортогональна система, сім’я Ламе, поверхня Монжа, формоутворення, співосні параболи, розгортний гелікоїд.**

Постановка проблеми. Вивчення скалярних і векторних полів, теорії пружності, кінематичних характеристик руху і багатьох інших об’єтів і процесів значно спрощується у випадку їх віднесення до ортогональних систем координат. Зокрема, наочним способом представлення скалярного поля є його розташування на поверхні рівня з подальшою їх візуалізацією засобами комп’ютерної графіки. Отже, розробка конструктивно-аналітичних способів триортогональних систем становить актуальну проблему як в теоретичному, так і в прикладному аспектах.

Аналіз досягнень і публікацій. Проблему побудови триортогональних систем вперше означив і отримав перші результати їх дослідження Ламе[1]. Функціями

$$x = f(t,\bar{u},\bar{v}), \quad y = \varphi(t,\bar{u},\bar{v}), \quad z = \psi(t,\bar{u},\bar{v}), \tag{1}$$

де x, y, z - прямокутні декартові координати, він увів криволінійні координати $t,\bar{u},\bar{v}$ і показав, що лінійний елемент простору через криволінійні координати за умов ортогональності криволінійної системи має вираз

$$ds^2 = H_t{}^2 dt^2 + H_{\bar{u}}{}^2 d\bar{u}^2 + H_{\bar{v}}{}^2 d\bar{v}^2, \tag{2}$$

де $H_t{}^2, H_{\bar{u}}{}^2, H_{\bar{v}}{}^2$ - функції Ламе, що дорівнюють сумі квадратів перших частинних похідних функцій (1) по $t,\bar{u},\bar{v}$ відповідно.

Вираз (1) можливий лише за умов

$$\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}}+\frac{\partial \psi}{\partial t}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}+\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{v}}+\frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}}=0, \qquad (3)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{v}}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial t}=0,$$

які окремо можуть слугувати відправним пунктом для пошуку триортогональних систем.

У самій загальній постановці відшук триортогональних систем зводиться до розв'язання системи диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку від функцій $H_t, H_{\bar{u}}, H_{\bar{v}}$ [2], наведеної в [6], або до розв'язання диференціальних рівнянь (3) у частинних похідних першого порядку.

Дарбу показав [3], що розв'язок рівнянь (3) залежить від трьох функцій двох змінних.

Дюпен [5] у своїй славетній теоремі довів, що лінії перетину будь-якої пари поверхонь, що належать різним сім'ям триортогональної системи, є лініями кривини як для однієї, так і для іншої поверхні.

Келі [4] довів, що сім'я поверхонь

$$F(x, y, z) = t \qquad (4)$$

може бути сім'єю Ламе, іншими словами, вона може увійти до складу триортогональної системи за умови, якщо функція F задовольняє диференціальному рівнянню третього порядку у частинних похідних.

Формулювання цілей статті. Використання триортогональних систем як координатних систем тривимірного простору має сенс лише за умов компактності рівнянь (1). Шляхи визначення функцій, що входять до рівнянь (1), не завжди приводять до їх визначення у кінцевому вигляді: диференціальні рівняння у частинних похідних та їх системи не завжди мають кінцеві розв'язки.

В статті розглядаються основні схеми формоутворення триортогональних систем з однією сім'єю Ламе у вигляді площин. Привабливими рисами таких систем є компактність аналітичного представлення та конструктивність геометричних засад для їх побудови.

Основна частина. На площині (ще на сфері) будь-яку лінію можна вважати лінією кривини. Відштовхуючись від теореми Дюпена, будь-яка площина, якщо вона входить до сім'ї Ламе, мусить перетинати дві інші сім'ї Ламе по ортогональним сім'ям плоских ліній. Для побудови триортогональної системи за кінематичним принципом необхідно примусити рухатись площину за таким законом, щоб ортогональні лінії двох згаданих сімей утворювали дві сім'ї ортогональних поверхонь, які б попарно перетинались між собою по лініях кривини. Іншими словами, дві сім'ї поверхонь, що доповнюють сім'ю площин до триортогональної системи, мусять нести на собі ортогональні траєкторії руху площини.

Існують три види рухів площини, утворюючих однопараметричну сім'ю площин:

- паралельне переміщення; ортогональні траєкторії – прямі, перпендикулярні усім площинам сім'ї;
- обертання навколо осі, розташованої на первісній площині; ортогональні траєкторії – кола у площинах, перпендикулярних осі;
- перекочування без ковзання по торсу; ортогональні траєкторії плоскі, якщо торс вироджується у циліндр, сферичні, якщо торс вироджується у конус, та довільні просторові криві у випадку не виродженого торсу.

Таким чином, визначником триортогональної системи буде:

- сім'я ліній на площині, що припускає побудову ортогональної сім'ї;
- визначник однопараметричної сім'ї площин.

Схема 1. За цією схемою утворюються загальні циліндричні координати.

На площині подають сім'ю ліній, що припускає побудову ортогональної їй сім'ї.

Паралельне перенесення площини інциденції ортогональних сімей лінії у напрямку перпендикуляра утворює триортогональну систему, що складається з двох ортогональних сімей циліндрів та з сім'ї площин, перпендикулярних твірним циліндрів.

Розглянемо загальний алгоритм визначення функцій (1) такої системи. Нехай рівняння сім'ї ліній на площині

$$F(x, y, t) = 0. \qquad (5)$$

Щоб отримати рівняння ортогональних траєкторій сім'ї (5) необхідно:

- про диференціювати рівняння (5) по x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0; \qquad (6)$$

- усунути параметр t з рівнянь (5), (6). В результаті отримаємо:

$$\phi(x, y, y') = 0; \qquad (7)$$

- розв'язати диференціальне рівняння

$$\phi(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0, \qquad (8)$$

одержане заміною в (7) y' на $-\frac{1}{y'}$.

В результаті отримаємо рівняння сім'ї ліній, ортогональних сім'ї ліній (5) у вигляді

$$R(x, y, u) = 0. \qquad (9)$$

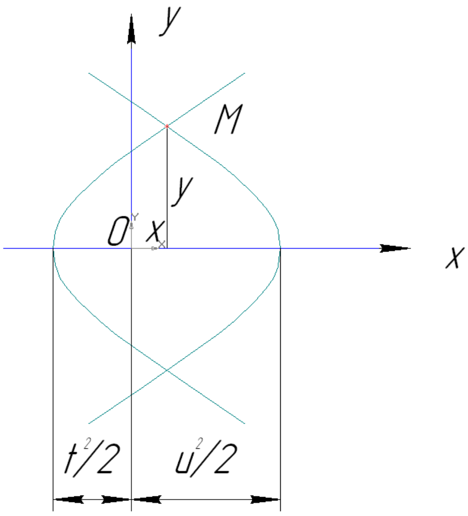

Рис. 1

Приклад 1. Скласти рівняння сім'ї парабол, ортогональних параболам сім'ї $y^2 = 2p^2x$.

Розв'язання. Подана парабола спрямована гілками у бік $+x$. Вісь oy проходить через вершину. Параметр параболи t^2. Паралельно перенесемо систему координат до суміщення початку з фокусом параболи. Відносно нової системи xoy (рис.1) рівняння параболи у вигляді (5) буде:

$$y^2 - 2t^2\left(x + \frac{t^2}{2}\right) = 0 \qquad (10)$$

де t - параметр сім'ї.

Продиференцюємо рівняння (10) по x:

$$2yy' - 2t^2 = 0. \qquad (11)$$

Підставимо вираз $t^2 = yy'$, одержаний з (11) до (10), і скоротимо на y. Після перетворень отримаємо:

$$y - y'(2x + yy') = 0. \qquad (12)$$

У рівнянні (12) замінимо y' на $-\frac{1}{y'}$. Одержимо рівняння

$$yy' + 2xy' - y = 0, \qquad (13)$$

Розв'язком якого є (див.[8], рівняння 1.464)

$$y^2 = 2cx + c^2, \qquad (14)$$

де c - стала інтегрування.

В умовах нашого прикладу параболи, що утворюють прямі кути з параболами сім'ї (10), спрямовані гілками у бік $-x$ (рис.1). Тому рівняння шуканої сім'ї отримаємо при від'ємних значеннях c, які з параметром u^2 параболи зв'язані рівністю

$$c = -u^2. \qquad (15)$$

Підставивши вираз з (15) до (14), отримаємо рівняння сім'ї парабол, ортогональних параболам сім'ї (10) у вигляді (9)

$$y^2 + 2u^2\left(x - \frac{u^2}{2}\right) = 0, \qquad (16)$$

де u - параметр сім'ї, u^2 параметр параболи.

Примітимо, що рівняння (14) при $c = t^2$ виражає сім'ю парабол (10). Це означає, що вхідні і вихідні дані цього прикладу ми можемо змінити місцями.

Віднімемо від лівої частини рівняння (16) ліву частину рівняння (10) і прирівняємо результати нулеві. Одержимо

$$x = \frac{u^2 - t^2}{2}. \qquad (17)$$

Підставимо вираз x (17) до (10) або (16). Отримаємо

$$y = \pm tu. \qquad (18)$$

Функціями (17), (18) вводиться криволінійна параболічна система координат на площині. Вона ортогональна, тобто координатні лінії $t = const$ утворюють прямі кути з координатними лініями $u = const$.

Для отримання просторової циліндричної системи ортогональних координат за схемою 1 необхідно до функцій (17), (18) добавити функцію $z = v$. Таким чином, функції (1) для тривимірної системи параболічних координат набувають вигляду

$$x = \frac{u^2 - t^2}{2}, \quad y = \pm tu, \quad z = v. \qquad (19)$$

Перевіримо виконання умов (3), зіставивши (1) з (19):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -t, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \pm u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \pm t, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = 1$$

і умови (3) виконуються. Координатні поверхні $t = const$ (параболічні циліндри), $u = const$ (параболічні циліндри) та $v = const$ (площини) складають триортогональну систему.

Лінійний елемент простору в циліндричній системі параболічних координат (див. (2))

$$ds^2 = (t^2 + u^2)(dt^2 + du^2) + dv^2.$$

Схема 2. Якщо сім'я плоских кривих і ортогональна їй сім'я мають вісь симетрії, обертанням навколо цієї осі півплощини отримаємо триортогональну систему, координатними поверхнями якої будуть поверхні обертання, утворені лініями плоскої ортогональної сітки, а також площини пучка з віссю, що збігається з віссю симетрії.

Координати, утворені за схемою 2, називають обертально-симетричними.

Повернемось до функцій (19), що подають циліндричні параболічні координати. Віссю симетрії плоских ортогональних сімей, розташованих у площині $z = 0$, є вісь ox (див. рис. 1), обертанням навколо якої мусить утворюватись триортогональна система за схемою 2. Щоб вісь $o\bar{z}$ займала своє звичайне вертикальне положення, а не була б спрямована на спостерігача, як це випливає з рис. 1 при доповненні плоскої системи до просторової, і щоб шукана система $\bar{x}\bar{o}\bar{y}\bar{z}$ лишалась правою, бажано осі $o\bar{z}$ наділити роль симетрії, навколо якої слід обертати півплощину $\bar{z}o\bar{x}$ для утворення триортогональної системи. З цих міркувань розташування осей шуканої системи $\bar{x}o\bar{y}\bar{z}$ відносно осей $xoyz$ системи (19) слід змінити за циклічною підстановкою $\bar{z},\bar{x},\bar{y} \to x,y,z$, що означає: вісь $o\bar{z}$ слід спрямувати по осі ox ($o\bar{z}$ набула ролі осі симетрії, яку відігравала ox), $o\bar{x}$ слід спрямувати по oy, $o\bar{y}$ - по ox.

Відповідно до цих міркувань і зважаючи на те, що при обертанні навколо осі $o\bar{z}$ відстані від точок меридіана до неї не змінюються, функції (1) введення обертально-симетричних параболічних координат набувають вигляду

$$\bar{x} = tu\cos v, \quad \bar{y} = tu\sin v, \quad \bar{z} = \frac{u^2 - t^2}{2}, \qquad (19^*)$$

де v - кут, відлік якого у напрямку від півплощини zox до поточної півплощини проти руху стрілки годинника.

Триортогональну систему обертально-симетричних координат утворюють координатні поверхні $t = const$ - параболоїди обертання, розташовані вершиною донизу, $u = const$ - параболоїди обертання, розташовані вершиною догори, $v = const$ - півплощини, що проходять через вісь oz.

Схема 3. Дві сім’ї ортогональних ліній, розташованих на площині, утворюють триортогональну систему поверхонь при перекочуванні без ковзання площини їх інциденції по торсу. Координатними поверхнями, що увійдуть до складу триортогональної системи, будуть: дві сім’ї різьблених поверхонь Монжа і сім’я площин, дотичних до торса.

Приклад 2. За схемою 3 сконструювати триортогональну систему, визначником якої є полярна плоска система координат (рис. 2)

$$\bar{x} = u\cos v, \quad \bar{y} = u\sin v, \qquad (20)$$

де u - полярний радіус, v - кутовий параметр положення полярного радіусу, а також прямий круговий циліндр радіуса r, який мусить обкочувати без ковзання площина інциденції полярної системи Ω.

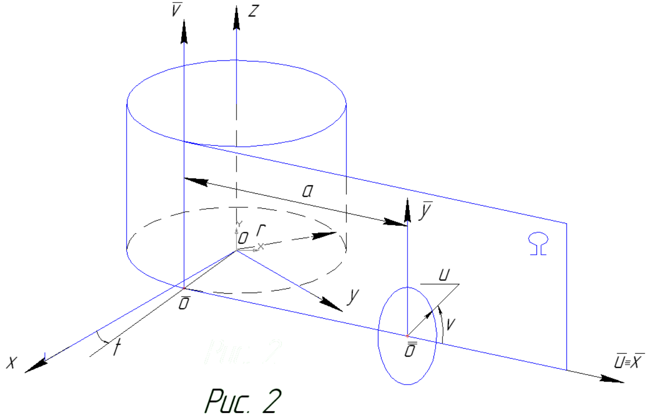

Рис. 2

Розв’язання. В роботах [9, 10, 11] було показано, що функції (1), які вводять узагальнену циліндричну систему координат $t,\bar{u},\bar{v}$ (рис.2)

$$x = r\cos t - \bar{u}\sin t, \quad y = r\sin t + \bar{u}\cos t, \quad z = \bar{v} \qquad (21)$$

В цій системі площина $t = const$ має дотик по осі $\bar{o}\bar{v}$ до циліндра радіуса r.

Обчислимо перші частинні похідні функції (21) по $t,\bar{u},\bar{v}$. Зважаючи на позначення в рівняннях (3), матимемо:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -r\sin t - \bar{u}\cos t, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = r\cos t - \bar{u}\sin t, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{u}} = -\sin t, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{u}} = \cos t, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{u}} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \bar{v}} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{v}} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{v}} = 1.$$

Підставимо вирази перших частинних похідних до першого з трьох рівнянь (3):

$$r\sin^2 t + \bar{u}\sin t\cos t + r\cos^2 t - \bar{u}\sin t\cos t = r \neq 0.$$

Перша з трьох умов (3) не задовольняється. Це означає, що система $t,\bar{u},\bar{v}$ не є триортогональною.

В роботах [9, 11] було доведено, що при перекочуванні площини Ω без ковзання по циліндру абсциса $\bar{u}$ зменшується на rt. З врахуванням цього факту, а також функцій (20), замінимо дві змінні $\bar{u},\bar{v}$ системи (21) на дві нові u,v змінні, зміст яких показано на рис. 2:

$$\bar{u} = a + u\cos v - rt, \quad \bar{v} = u\sin v. \qquad (22)$$

Підставимо до (21) замість $\bar{u}$ та $\bar{v}$ їхні вирази (22). Отримаємо:

$$x = r\cos t - (a + u\cos v - rt)\sin t, \quad y = r\sin t + (a + u\cos v - rt)\cos t, \quad z = u\sin v \qquad (23)$$

Впевнимось, що функції (23) вводять триортогональну систему. Частинні похідні по t,u,v від функцій (23)

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -(a + u\cos v - rt)\cos t, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -(a + u\cos v - rt)\sin t, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\cos v\sin t, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \cos v\cos t, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \sin v,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = u\sin v\sin t, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -u\sin v\cos t, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u\cos v.$$

Умови (3) триортогональної системи координат t,u,v (23) виконуються. Координатні поверхні як складові триортогональної системи : $t = const$ - сім'я площин, дотичних до циліндра, $u = const$ - різьблені поверхні Монжа, меридіанами яких є кола радіуса u.

Доведемо, що третю сім'ю триортогональної системи складають розгортні (евольвентні) гелікоїди, тобто, рівняння (23) при $v = const$ є гелікоїд.

Прямі $v = const$ мають сталий кут нахилу до осі $\bar{u}$ і до площини xoy (рис. 2). Вони дотикаються циліндра при

$$\bar{u} = a + u\cos v - rt = 0, \qquad (24)$$

(див. (24), (23)), тобто, рівняння (24) є внутрішнім рівнянням поверхні $v = const$. Знайдемо t з (24)

$$t = \frac{a + u\cos v}{r}. \qquad (25)$$

З врахуванням (24) та (25) рівняння (23) набувають вигляду

$$x = r\cos\left(\frac{a + u\cos v}{r}\right), \quad y = r\sin\left(\frac{a + u\cos v}{r}\right), \quad z = u\sin v \qquad (26)$$

І виражають циліндричну гвинтову лінію на циліндрі радіуса r. Оскільки при $a = const, v = const, r = const$ залежність між u та t лінійна (див. (24)), при рівномірній зміні u рівномірно змінюється t, тобто, рівномірному переміщенню з параметром u точки уздовж прямої $v = const$ відповідає рівномірне обертання її навколо oz. Це ще раз свідчить про те, що рівнянню (26) відповідає гвинтова лінія.

Визначимо її крок h. Для цього знайдемо значення u при $t = 0$ та при $t = 2\pi$ з (24) і підставимо їх до третього з рівнянь (23). Потім визначимо крок h гвинтової лінії:

$$h = z_{t=2\pi} - z_{t=0} = 2\pi r tgv. \qquad (27)$$

Здійснимо розгортку циліндра на дотичну площину $\overline{uov}$ (рис.2). Якщо на ній відобразити один виток циліндричної гвинтової лінії, то, згідно з (27) вона відобразиться у вигляді діагоналі прямокутника довжиною $2\pi r$ і висотою h. Оскільки пряма $v = const$ має такий же кут нахилу до площини xoy і до осі $\overline{ou}$, вона в точці дотику до циліндра дотикається також до гвинтової лінії (26).

Таким чином, при змінному t та u і при $v = const$ рівняння (23) виражає розгортний (евольвентний) гелікоїд, а при змінному v - сім'ю гелікоїдів.

З рівності (27) видно, що при $0 < v < \frac{\pi}{2}$ та при $\pi < v < \frac{3\pi}{2}$ евольвентні гелікоїди праві, а при $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ та при $\frac{3\pi}{2} < v < 2\pi$ - ліві. При $v = 0, \ v = \pi, \ v = 2\pi$ евольвентний гелікоїд вироджується у площину, при $v = \frac{\pi}{2}, \ v = \frac{3\pi}{2}$ він вироджується у евольвентний циліндр.

Висновки. Конструктивно-аналітичний підхід до формоутворення триортогональних систем дозволяє дістатись тонкощів у їх дослідженні, що сприяє розширенню застосувань при розв'язанні прикладних задач.

Література
1. *Lamé G.* Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris, 1859.
2. *Каган В.Ф.* Основы теории поверхностей. ч.II, М.–Л., ОГИЗ, ГИТТЛ., 1948, 407с.
3. *Darboux G.* Leçons sur les systèmes orthogonoux et les coordonnées curvilignes. Paris,1897, 2-e éd. Compl., 1910.
4. *Cayley A.* Sur la condition qu'une famille de surfaces données puisse faire partie d'un système orthogonale .C. –R. Ac.sci, 75, 1872 ; Coll.math.Papers, VIII.
5. *Dupin Ch* . Développment de géométrie. Paris, 1813.
6. *Андрєєва В.В.* Триортогональна система на основі параболічного пучка сфер// Геометричне та комп'ютерне моделювання: 21 наук. праця: Редкол.: Л.М. Куценко (відп. ред.) та ін.; Харк. держ. університет харчування та торгівлі. – Харків, 2005. – с.53-60.
7. *Гутер Р.С., Янпольский А.Р.* Дифференциальные уравнения. М.:"Высшая школа ", 1976, 394с.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.:"Наука", 1971, 576с.
9. *Скидан И.А*. Геометрическое моделирование кинематических поверхностей в специальных координатах. Дис.. д-ра. техн. наук: 05. 01.01 – М., 1989. – 278с.
10. *Скидан И.А*. Обобщенные цилиндрические координаты и их приложения в прикладной геометрии // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Вып. 13. – К.: "Будівельник", 1971. – с. 15-20.
11. *Скидан И.А.* Обобщенные цилиндрические координаты и их применение к расчету оболочек // Доклады VIII научно-технической конференции инженерного факультета. – М. – УДН им. П. Лумумбы, 1972. – с.21-23.

TRIORTHOGONAL SYSTEMS WITH A COORDINATE FAMILY OF PLANS

V. Andreeva

Summary

Three charts of formation of the triorthogonal systems which the family of coordinate planes is included in are considered. The consideration is based on the structural-analytical method.