

УДК 622.24.053

Докт. техн. наук УЛИТИН Г.М. (ДонНТУ)

КОЛЕБАНИЯ БУРОВОЙ КОЛОННЫ КАК ГИДРОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ

При технологических режимах бурения буровая колонна взаимодействует с жидкой средой — промывочной жидкостью или находится в безграничной водной среде (море). Многими авторами учтено и исследовано влияние трения сопротивления жидкости на колебания колонны. Например, сопротивление жидкости поперечным колебаниям исследовано в работе [1], продольным — в монографиях [2,3]. В то же время, насколько известно автору, не была решена задача о колебаниях связанной гидроупругой системы: колонна — жидкость.

В качестве модели гидроупругой системы рассмотрим упругий стержень длиной l (колонна), погруженный в жидкость, заполняющей цилиндрический резервуар радиуса R (скважина) и введем цилиндрическую систему координат (x, r, θ) (рис. 1).

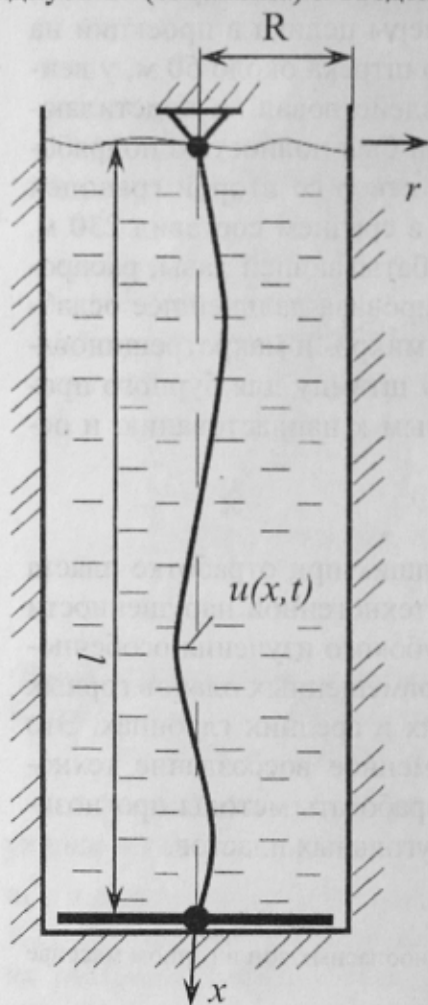


Рис. 1. Схема гидроупругой системы

Задача об исследовании такой системы сводится [4] к совместному решению граничной задачи для потенциала скоростей жидкости $\Phi(x, r, \theta, t)$:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0; \quad (1)$$

$$\Phi|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r}|_{r=R} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}|_{x=l} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r}|_{r=u} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

и граничной задачи для поперечных колебаний $u(x, t)$ буровой колонны:

$$EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mp T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q(x, t); \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0; \quad u''(0, t) = u''(l, t) = 0,$$

где m — погонная масса буровой колонны, EJ — ее изгибная жесткость, T — продольная сила растяжения (сжатия).

Первое граничное условие задачи (1) не учитывает влияние поверхностных волновых движений жидкости на динамические характеристики системы, что допустимо для глубин $l/R > 1$ [5]. Динамическое давление на стержень определим из линеаризованного интеграла Коши:

$$q(x, t) = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{r=u(x, t)}, \quad (3)$$

где ρ — плотность жидкости.

Методом Фурье получим решение граничной задачи (1), удовлетворяющее первым трем граничным условиям:

$$\Phi(x, r, \theta, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{jn}(t) (ch\lambda_{jn}(x-l) - ch\lambda_{jn}l) J_n(\lambda_{jn}r) \cos n\theta, \quad (4)$$

где $\varphi_{jn}(t)$ – пока неопределенные функции времени. $J_n(z)$ – функции Бесселя первого рода. $\lambda_{jn} = \mu_{jn}/R$, μ_{jn} – корни уравнения $\mu J_{n-1}(\mu) = nJ_n(\mu)$.

Выражение для поперечных колебаний упругого стержня представим в виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (5)$$

что позволяет удовлетворить граничным условиям задачи (2).

Будем считать, что колебания малы и происходят в плоскости $\theta = 0$. Подставим выражение для потенциала скоростей (4) и форму колебаний (5) в третье граничное условие задачи (1). Используя асимптотические представления для функций Бесселя при малых значениях аргумента, получим:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(t) \lambda_j}{2\Gamma(2)} (ch\lambda_j(x-l) - ch\lambda_j l) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{y}_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (6)$$

где $\lambda_j = \mu_j/R$, μ_j – корни уравнения $\mu J_0(\mu) = J_1(\mu)$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

К уравнению (6) применим метод Бубнова-Галеркина по системе функций $\left\{ \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}$. Получим систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^p \alpha_{jk} \varphi_j = \dot{y}_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (7)$$

где $\alpha_{jk} = \frac{\lambda_j}{2l} \int_0^l (ch\lambda_j(x-l) - ch\lambda_j l) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$.

Из системы (6) определим функции:

$$\varphi_j = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^p \beta_{jk} \dot{y}_k, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (8)$$

где β_{jk} – алгебраические дополнения матрицы $\|\alpha_{jk}\|$, $\Delta = \det \|\alpha_{jk}\|$.

Подставим выражение для поперечных колебаний (5) и динамическое давление (3) с учетом формулы (8) во вторую граничную задачу (2):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(m\ddot{y}_k + \left(EJ \frac{k^4 \pi^4}{l^4} \pm T \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \right) y_k \right) \sin \frac{k\pi x}{l} = -\rho \sum_{j=1}^{\infty} \dot{\varphi}_j (ch\lambda_j(x-l) - ch\lambda_j l) \quad (9)$$

Если в выражение (9) подставить значения функций φ_j (8) и применить метод Бубнова-Галеркина по системе функций $\left\{ \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}$, то получим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\xi_{nn}\ddot{y}_n + \sum_{k=1}^p \xi_{nk}\ddot{y}_k + \kappa_n^2 y_n = 0, \quad n=1,2,\dots,p, \quad (10)$$

где знак штрих над суммой означает пропуск при суммировании члена соответствующего значению $k = n$.

Полагая $y_n = a_n e^{i\omega t}$, из системы (10) получаем однородную систему алгебраических уравнений для определения собственных частот ω и форм $\{a_n\}$ колебаний гидроупругой системы:

$$(\gamma_{nn} - \eta)a_n - \sum_{k=1}^p \gamma_{nk}a_k = 0, \quad (11)$$

где $\gamma_{nk} = \frac{\xi_{nk}}{\kappa_n^2}; \eta = \frac{1}{\omega^2}$.

Система (11) имеет нетривиальное решение, если

$$\det\|\gamma_{nk} - \eta\delta_{nk}\| = 0, \quad n, k = 1, 2, \dots, p,$$

где δ_{nk} – символ Кронекера.

Ввиду громоздкости формул выражения для коэффициентов ξ_{nk}, κ_n здесь не приводятся. Таким образом, задача свелась к определению собственных значений и собственных векторов матрицы $\|\gamma_{nk}\|$.

Из анализа коэффициентов ξ_{nk}, κ_n следует, что учет гидроупругости снижает значения собственных частот колебаний буровой колонны.

Библиографический список

1. Грэм Д., Фрост М., Уилхойт Д. Анализ движения колонны буровых труб при глубоком бурении. Вынужденное поперечное движение // Конструирование и технология машиностроения. Сборник трудов американского общества инженеров-механиков: Пер. с англ. — М.: Мир, 1965. — №2. — С. 40–48.
2. Харченко Е.В. Динамические процессы буровых установок. — Львов: Свиточ, 1991. — 176 с.
3. Сароян А.Е. Теория и практика работы буровой колонны. — М.: Недра, 1990. — 264с.
4. Мнев Е.Н., Перцев А.К. Гидроупругость оболочек. — Л.: Судостроение, 1970 — 365с.
5. Перехрест В.И., Улитин Г.М., Шевченко В.П. Влияние волновых движений жидкости на упругие колебания цилиндрической оболочки // Теоретическая и прикладная механика, 1980. — № 11. — С. 83–87.

© Улитин Г.М., 2005