УДК 515.2

# ТРИОРТОГОНАЛЬНА СИСТЕМА НА ОСНОВІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ КООРДИНАТ

Андрєєва В.В., аспірант
*Донецький національний технічний університет*
Тел. (062) 338-48-85

***Анотація*** **– пропонується триортогональна система, що утворюється качінням без ковзання площини по прямому круговому циліндру.**

***Ключові слова*** **– триортогональна система, евольвента, ортогональна траєкторія, різьблена поверхня.**

*Постановка проблеми.* В математичній фізиці, теорії пружності, теорії суцільного середовища і в багатьох інших галузях науки триортогональні системи відіграють значну роль, особливо у випадках, коли їх структура відповідає формі об’єкта чи сутності процеса. В цьому випадку в значній мірі зменшується вплив системи на складність математичної моделі чи процеса, що досліджується.

*Аналіз останніх досліджень.* Триортогональна система, що пропонується є вдосконаленням узагальненої циліндричної системи координат [1], що введена функціями

$$x = r\cos t - u\sin t, \quad y = r\sin t + u\cos t, \quad z = v, \tag{1}$$

яка утворена сім’єю дотичних до прямого кругового конуса площин. На площині сім’ї встановлено прямокутну декартову систему координат, вісь $\overline{ov}$ якої є лінією дотику до циліндра. При $u = 0$ узагальнена циліндрична система переходить в класичну циліндричну систему.

Узагальнені циліндричні координати дають ефект у застосуванні до опису кінематичних поверхонь. Стала чи змінна плоска твірна подається на площині $t = const$ і простою підстановкою в (1) отримуються параметричні рівняння кінематичної поверхні.

Система не є триортогональною за причини невиконання першої з трьох умов триортогональності [2]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u} = u,\\
&\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,\\
&\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Крім того, вона ліва, а не права, що також є небажаним для застосувань.

*Формулювання цілей статті* – перетворити ліву косокутну узагальнену циліндричну систему координат у триортогональну праву.

*Основна частина*. Крім обертального руху навколо осі $oz$ площині $t = const$ слід надати поступальний рух самої по собі з параметром $rt$. У цьому випадку площина $t = const$ здійснює качіння без ковзання по прямому круговому циліндру. Правий напрямок осям координат отримаємо, змінивши напрям осі $ou$ на протилежний, тобто, спрямувавши її у бік зростання $u$. Вісь $ot$ слід направити у бік, протилежний $oz$.

Функції введення триортогональної системи набувають вигляду

$$x = r\cos t + (u + rt)\sin t, \quad y = r\sin t - (u + rt)\cos t, \quad z = -v, \tag{3}$$

Умови триортогональності системи (3) задовільнюються.

Сім'ями Ламе [3] є:

$t = const$ – півплощина, дотична до циліндра $r$, який у подальшому будемо називати опорним;

$u = const$ – циліндр з твірною, паралельною осі $oz$, і напрямною евольвентою кола $r$;

$v = const$ – площина з отвором радіуса $r$, паралельна площині $xoy$.

Визначимо сім'ї Ламе функціями

$$f_1(x, y, z) = t, \quad f_2(x, y, z) = u, \quad f_3(x, y, z) = v, \tag{4}$$

як це прийнято в теорії поля. Для цього необхідно розв'язати систему рівнянь (3) відносно $t, u, v$. Слід зазначити, що положення площини $t = const$ у просторі залежить тільки від обертального руху навколо осі $oz$ і не залежить від зсуву площини разом з віссю $ov$. Тому, щодо визначення $t$, з рівнянь (3) слід усунути зсув площини самої по собі на відстань $rt$, тобто, $t$ необхідно визначити за початковою умовою: при $t = 0$ зсуву немає. При цьому $u$ також відповідає цій же умові. Таким чином з (3) випливає:

$$x = r, \quad y = -u_0,$$

звідки

$$\frac{y}{x} = -\frac{u_0}{r}. \tag{5}$$

Підведенням лівих і правих частин перших двох рівнянь (3) до квадрату і додаванням одержаних лівих і правих частин отримаємо

$$x^2 + y^2 = r^2 + (u_0 + rt)^2,$$

звідки

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2} - u_0}{r}. \tag{6}$$

Підставимо до (6) вираз $u_0$ з (5). Отримаємо:

$$t = \frac{x\sqrt{x^2 + y^2 - r^2} + ry}{rx}. \tag{7}$$

Очевидно

$$u = u_0 + rt.$$

Підстановкою $u_0$ з (5) і $t$ з (7) отримаємо:

$$u = \frac{x\sqrt{x^2 + y^2 - r^2} + ry}{rx} - \frac{ry}{x}. \tag{8}$$

Нарешті, третє з рівнянь (3) дає:

$$v = -z. \tag{9}$$

Таким чином, функції (4) мають вигляд (7), (8), (9).

Основне застосування триортогональної системи (3) в прикладній геометрії – надзвичайно простий і методологічно прозорий аналітичний опис класу поверхонь з двома сім'ями плоских ліній кривини. Цей клас слід віднести до різьблених поверхонь Монжа, меридіаном якої є довільна плоска лінія, а паралелями – евольвенти кола радіуса $r$, які є ортогональними траєкторіями площини, що перекочується без ковзання по прямому круговому циліндру.

Розглянемо два способи подання меридіану:

- параметричними рівняннями на площині $t = 0$:

$$u = u(w), \quad v = v(w);$$

- явним рівнянням на площині $t = 0$:

$$u = u(v).$$

При першому способі подання параметричні рівняння різьбленої поверхні Монжа:

$$x = r\cos t + [u(w) + rt]\sin t, \quad y = r\sin t - [u(w) + rt]\cos t, \quad z = -v(w) \tag{10}$$

і поверхня віднесена до ліній кривини $t = const$, $w = const$.

При другому способі подання :

$$x = r\cos t + [u(v) + rt]\sin t, \quad y = r\sin t - [u(v) + rt]\cos t, \quad z = -v \qquad (11)$$

і поверхня віднесена до ліній кривини $t = const$ , $v = const$ .

Впевнитися у збіганні координатної сітки з сіткою ліній кривини поверхонь (10), (11) можна, знайшовши вирази середніх коефіцієнтів першої і другої квадратичної форми, які тотожно дорівнюють нулеві.

Розглянемо приклади.

*Приклад 1.* Скласти рівняння різьбленої поверхні Монжа, меридіаном якої є коло

$$u = a + R\cos w, \quad v = R\sin w \qquad (12)$$

Візуалізувати різьблену поверхню Монжа засобами комп'ютерної графіки.

*Розв'язання.* Параметричні рівняння різьбленої поверхні Монжа отримаємо підстановкою до (10) замість $u$ і $v$ їхніх виразів (12)

$$\begin{aligned} x &= r\cos t + (a + R\cos w + rt)\sin t, \\ y &= r\sin t - (a + R\cos w - rt)\cos t, \\ z &= -R\sin w \end{aligned} \qquad (13)$$

На рис.1 показано аксонометричну проекцію різьбленої поверхні Монжа, отриманої з використанням програми Maple, при значеннях параметрів

$r = 2, \quad a = 16, \quad R = 3, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad 0 \le w \le 2\pi.$

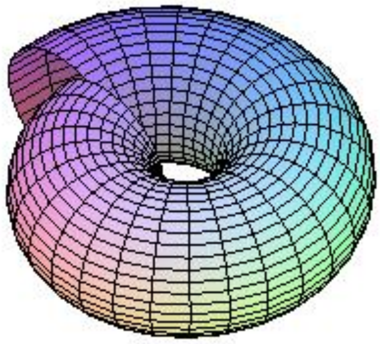

Рис.1. Різьблена поверхня Монжа з меридіаном
$u = a + R\cos w,\ v = R\sin w$

*Приклад 2.* Меридіаном різьбленої поверхні Монжа є пряма

$$u = \frac{v}{a}. \tag{14}$$

При якому зв'язку між параметрами $a, r$ та кроком $h$ різьблена поверхня Монжа є розгортним гелікоїдом?

Скласти параметричні рівняння і навести аксонометричне зображення розгортного гелікоїда.

*Розв'язання.* Підставивши вираз $u$ з (14) до (11), одержимо

$$\begin{aligned} x &= r\cos t + \left(\frac{v}{a} + rt\right)\sin t, \\ y &= r\sin t - \left(\frac{v}{a} + rt\right)\cos t, \\ z &= -v. \end{aligned} \tag{15}$$

– параметричні рівняння різьбленої поверхні Монжа.

Внутрішні рівняння циліндричної гвинтової лінії на поверхні опорного циліндра у вигляді

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos t, \\
y &= r\sin t, \\
z &= \frac{ht}{2\pi}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

отримаємо з (15) при

$$\frac{v}{a} - rt = 0, \quad v = \frac{ht}{2\pi}. \tag{17}$$

Таким чином, пряма $u = \frac{v}{a}$, як меридіан різьбленої поверхні Монжа, описує розгортний гелікоїд кроку $h$, якщо між $a, r$ та $h$ існує залежність

$$a = \frac{h}{2\pi r}. \tag{18}$$

На рис.2 показано розгортний гелікоїд, який одночасно є різьбленою поверхнею Монжа.

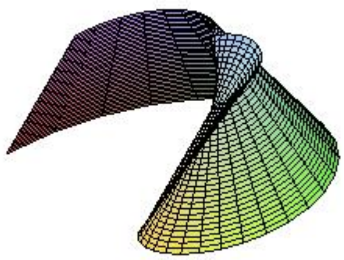

Рис.2. Різьблена поверхня Монжа з меридіаном $v = au$ (розгортний гелікоїд)

*Висновки.* Триортогональна система, отримана вдосконаленням косокутної системи узагальнених циліндричних координат перспективна у її застосуваннях в теорії поля, теорії суцільного середовища. В прикладній геометрії вона зручна для опису різьблених поверхонь Монжа з двома сім'ями плоских ліній кривини.

Література

1. *Скидан И.А.* Обобщенные цилиндрические координаты и их приложения в прикладной геометрии // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Вып. 13. – К.: ”Будівельник”, 1971. – с. 15-20.
2. *Darboux G.* Leçons sur les systèmes orthogonoux et les coordonnées curvilignes. Paris, Gauthier-Villars, 1910. – 567 p.
3. *Lamé G.* Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris, 1859.

**TRIPLY-ORTHOGONAL SYSTEM BASED ON GENERALIZED CYLINDRIC COORDINATES**

V. Andreeva

**Summary**

**The transformation of generalized cylindric coordinates in triply-orthogonal system by adding the moving of translation to tangent plan of circulaire cylinder is proposed.**