УДК 519.168

В.П. Долгин (канд. техн. наук, доц.)
Севастопольский национальный технический университет, г. Севастополь
кафедра автомобильного транспорта
E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

МЕТОД КОМБИНАТОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Изложена методика синтеза процедуры комбинаторной фильтрации, улучшающая отношение сигнал – шум. Получены статистические оценки результата фильтрации аддитивной помехи и их граничные значения. Приведены результаты имитационного моделирования. Получены характеристики качества фильтрации.
***Ключевые слова:** помеха, фильтрация, дисперсия, математическое ожидание, вероятность, достоверность, математическая модель, закон распределения.*

Состояние проблемы. При моделировании технологически процессов, сопровождаемых влиянием помех, для снижения эффекта их воздействия вводят устройства фильтрации в структуру модели управления [1]. Фильтрация обычно сопряжена с преобразованием спектра [1,2]. При этом помимо преобразования спектра помехи происходит преобразование спектра сигнала, что приводит к его искажению и, в конечном счете — к ухудшению качества обработки. В случае совпадения спектров сигнала и помехи отношение сигнал – шум остается практически неизменным, т.е. процесс фильтрации неэффективен. Качество фильтрации повышается с увеличением разницы спектров сигнала и помехи, чего в ряде случаев не удается добиться.

В работах по численному анализу [2] показано, что граница и дисперсия погрешности вычислений, возникающей из-за наличия шумовой составляющей (оценки Хемминга), неуклонно растут с увеличением порядка разностных моделей, что ограничивает диапазон их применения. Непосредственное использование традиционных методов фильтрации неэффективно ввиду характерных особенностей разностных методов. В этом случае эффекта можно достичь при комбинаторном подходе к решению задачи снижения погрешности.

Постановка задачи. Известны оценки статистических характеристик для отдельной конечной разности [2 – 4]. Наличие сильной отрицательной корреляции последовательных разностей используется для обнаружения отдельных ошибок в таблице данных. При наличии погрешности отдельной ординаты, известен алгоритм учета этой погрешности [2,3].

Для аддитивной случайной помехи любое значение ординаты можно представить как

$$Y_k = y_k + E_k ,$$

где $y_k -$ истинное значение; $E_k -$ величина помехи (погрешность задания ординаты процесса). В общем случае погрешность вычисления конечной разности n-го порядка, отнесенной к k-й ординате Y_k, можно представить выражением

$$E_k^n = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i E_{k+i} \qquad (1)$$

При ограничениях на E_{k+i} типа $|E_{k+i}| \le E$ погрешность конечной разности увеличивается с возрастанием ее порядка n по закону $|\ E_k^n\ | \le 2^n E$, где $E -$ предельная погрешность [2].

Целью статьи является улучшение статистических параметров разностного приближения функций, в частности границы и дисперсии погрешности.

Основное содержание работы. Рассмотрим подход к улучшению статистических оценок погрешности вычисления конечных разностей при сохранении ограничений [2] на отдельный шум: погрешности представления данных являются независимыми случайными величинами, ограниченными величиной E.

Теорема. Абсолютное значение погрешности суммы последовательных конечных разностей одного и того же порядка не превышает границы погрешности отдельной конечной разности, входящей в суммируемую последовательность с наибольшим весовым коэффициентом, и дисперсией, меньшей дисперсии погрешности отдельной конечной разности:

$$\left|S^m(E_k^n)\right| / K_q \le G_n^0(E);\ D_n^m(E) < D_n^0(E), \tag{2}$$

где $S^m(E_k^n)$ — погрешность суммы $(m+1)$ последовательных конечных разностей n–го порядка, взятых с весовыми коэффициентами $K_0, K_1, ..., K_m$; $G_n^0(E)$ – граничное значение погрешности отдельной конечной разности (оценка Хемминга); K_q — наибольший весовой коэффициент последовательности суммируемых конечных разностей $(q = [0, m])$; $D_n^m(E) = D\left[S^m(E_k^n)/K_q\right]$; $D_n^0(E)$ — дисперсия погрешности отдельной конечной разности (оценка Хемминга).

Доказательство. Найдем сумму погрешностей m конечных разностей

$$S^m(E_k^n) = \sum_{j=0}^{m} E_{k+j}^n K_j, \tag{3}$$

где K_j — коэффициент, с которым суммируется j– я конечная разность. С учетом равенства (1) выражение (3) можно привести к виду

$$S^m(E_k^n) = K_q \sum_{i=0}^{R} E_{k+R-i} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i-j} C_n^{i-j} k_j, \tag{4}$$

где $k_j = K_j / K_q$ — весовой коэффициент; $R = n + m$.

На основании аксиомы треугольника и равенства (4) получим

$$\left|S^m(E_k^n)\right| \le K_q \sum_{i=0}^{R} \left| E_{k+R-i} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i-j} C_n^{i-j} k_j \right|.$$

Для предельного значения погрешности $E \ge \left|E_{k+R-i}\right|$ запишем

$$S_n^m(E) = K_q \sum_{i=0}^{R} E \left| \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i-j} C_n^{i-j} k_j \right|.$$

Определим с учетом условия (2) границу погрешности сумм конечных разностей, взятых с весовыми коэффициентами:

$$G_n^m(E) = E \sum_{i=0}^{R} \left| \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_n^{i-j} k_j \right|, \tag{5}$$

где $G_n^m(E) \ge \left|S^m(E_k^n)\right| / K_q$.

Нетрудно видеть, что при $m = 0$ и $k_0 = 1$ получаем оценку Хемминга

$$G_n^0(E) = E \sum_{i=0}^{n} C_n^i = E2^n.$$

Поскольку $\left|S^m(E_k^n)\right| \le S_n^m(E)$, для доказательства теоремы достаточно показать справедливость соотношения

$$G_n^m(E) \le G_n^0(E),$$

смысл которого заключается в том, что граница погрешности сумм конечных разностей, взятых с весовыми коэффициентами, не превосходит значения границы погрешности отдельной конечной разности, определенной Хеммингом.

Заменив в определении дисперсии $S^m(E_k^n)$ на $G_n^m(E)$, докажем вторую часть теоремы.

Задача состоит в определении закона изменения весовых коэффициентов k_j в функции номера суммируемой конечной разности j, при котором удовлетворяется условие (2). При таком подходе функцию $k(j)$ можно рассматривать как модулирующую. Найдем значение границы суммы погрешностей для одинаковых весовых коэффициентов, т. е. для $k(j)=1(j)$, и определим условия, при которых выполняется требование (2). Исходя из того, что [4]

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_n^j = (-1)^k C_{n-1}^k, \quad 0 \le k \le n, \tag{6}$$

выражение (5) при $k_j = 1$ ($j=[0,m]$) можно упростить для $m \ge n-1$. В результате

$$G_n^m(E) = E2\sum_{i=0}^{R} C_{n-1}^i, \quad R \ge 2n-1,$$

что и доказывает первую часть теоремы, так как при $m < n-1$ значение суммы биномиальных коэффициентов может быть лишь меньше полученного.

Проведем анализ границы суммы погрешностей при $k_j = 1$ ($j=[0,m]$). Для этого рассмотрим выражение (5) без ограничений на *m* справа. Поскольку биномиальные коэффициенты равны нулю за пределами треугольника Паскаля, можно утверждать, что граничное значение суммы (5) перестанет изменяться в случае $k_j = 1$ ($j=[0,m]$), начиная с некоторого значения m .

Утверждение 1. При условии $m \ge n-1$ граничное значение погрешности суммы конечных разностей неизменно и равно граничному значению погрешности отдельной конечной разности:

$$G_n^m(E) = G_n^0(E), \quad m \ge n-1.$$

Доказательство. Представим (5) двумя полусуммами, положив $m = n-1$ и $k_j = 1$ ($j=[0,m]$):

$$S_1^m = \sum_{i=0}^{n-1}\left|\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j C_n^{i-j}\right|; \quad S_2^m = \sum_{i=n}^{2n-1}\left|\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j C_n^{i-j}\right|.$$

Воспользовавшись свойствами симметрии биномиальных коэффициентов [4], можно показать, что полусуммы равны $S_1^m = S_2^m$. Используя свойство (6), получим

$$S_1^m = S_2^m = \sum_{i=0}^{n-1}\left|(-1)^i C_{n-1}^i\right| = 2^{(n-1)},$$

что и доказывает утверждение 1.

Рассмотрим границу погрешности сумм конечных разностей при ограничениях на *m* справа: $m < n-1$. При указанных ограничениях на m необходимо рассмотреть случаи $m/2 = m\backslash 2$ и $m/2 \ne m\backslash 2$, т.е. для четных и нечетных m .

Утверждение 2. Граница погрешности $G_n^m(E)$ постоянна и равна $E2^n$ при нечетном числе $m+1$ суммируемых разностей $n-$ го порядка: $G_n^m(E) = E2^n$, где $m-$ четное.

Доказательство. Для четных значений m выполняется условие [4]

$$\sum_{j=0}^{m} C_n^{i-2j} \ge \sum_{j=0}^{m} C_n^{i-2j-1}; \quad i \ge 0. \tag{7}$$

С учетом условия (7) выражение (5) при $k_j = 1$ $(j=[0,R])$ сводится к виду

$$G_n^m(E) = E\sum_{i=0}^{R}(-1)^i \sum_{j=0}^{m}(-1)^{i-j} C_n^{i-j}.$$

После преобразований имеем

$$G_n^m(E) = E\sum_{j=0}^{m}(-1)^j \sum_{i=j}^{R} C_n^{i-j}.$$

Учитывая, что $C_n^p = 0$ при $p > n$, получим

$$G_n^m(E) = E\sum_{j=0}^{m}(-1)^j \sum_{i=0}^{n} C_n^i = E2^n \sum_{j=0}^{m}(-1)^j,$$

что и доказывает утверждение 2.

Утверждение 3. Граница погрешности суммы четного числа $m+1$ конечных разностей n–го порядка функции, заданной дискретными значениями ординат и представленных с погрешностью, не превышающей по абсолютной величине значения E, является зависимостью вида

$$G_n^m(E) = 2E\sum_{j=0}^{m\backslash 2} C_n^k, \tag{8}$$

где $k = R\backslash 2 - 2j$ — линейная функция номера суммируемой разности; $R\backslash 2$ и $m\backslash 2$ — целая часть от деления на два соответственно значений R и m, m — нечетное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для нечетных значений m неравенство (6) выполняется, если $i = [0, R\backslash 2]$. При $i > R\backslash 2$ и нечетном значении m справедливо неравенство

$$\sum_{j=0}^{m} C_n^{i-2j-1} \geq \sum_{j=0}^{m} C_n^{i-2j}, \tag{9}$$

где $R = n + m$. С учетом изложенного, выражение для границы погрешности (5) можно привести к виду

$$G_n^m(E) = E(S_1^m + S_2^m),$$

где
$$S_1^m = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \sum_{i=0}^{R\backslash 2} C_n^{i-j},\ \ S_2^m = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \sum_{i=R\backslash 2+1}^{R} C_n^{i-j}. \tag{10}$$

Используя свойство симметрии биномиальных коэффициентов, можно показать, что при нечетных n и m справедливо соотношение

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j C_n^{R\backslash 2-j} = 0,\ \ m < n-1. \tag{11}$$

Заметив, что при нечетном значении m справедливо равенство $m - m\backslash 2 = m\backslash 2 + 1$, и изменив порядок суммирования, после преобразований найдем

$$\sum_{j=0}^{m-m\backslash 2-1}(-1)^{j+m\backslash 2+1} C_n^{R\backslash 2-j-m\backslash 2-1} = \sum_{j=0}^{m\backslash 2}(-1)^{m-j} C_n^{R\backslash 2-j},$$

так как $C_n^{R\backslash 2+j-m} = C_n^{R\backslash 2-j}$.

Следовательно,
$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j C_n^{R\backslash 2-j} = \sum_{j=0}^{m\backslash 2} C_n^{R\backslash 2-j}(-1)^j(1+(-1)^m).$$

Поскольку m нечетное, получим в итоге нулевое значение правой части: $(1+(-1)^m) = 0$.

Результат позволяет представить выражение (10) для S_2^m в виде

$$S_2^m = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \sum_{i=R\backslash 2}^{R} C_n^{i-j}. \tag{12}$$

Утверждение 4. Суммы, составляющие значение приведенной границы погрешности, равной $G_n^m(E)/E$, одинаковы по абсолютной величине

$$S = S_1^m = S_2^m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Изменим в выражении (12) пределы суммирования по i:

$$S_2^m = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \sum_{i=0}^{R\backslash 2} C_n^{R\backslash 2+i-j}.$$

Изменив последовательно порядок суммирования по j и i, после преобразований с учетом свойств симметрии биномиальных коэффициентов имеем

$$S_2^m = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \sum_{i=0}^{R\backslash 2} C_n^{i-j}.$$

Полученное выражение для S_2^m совпадает с выражением для S_1^m, что и доказывает утверждение 4.

Таким образом, выражение для приведенной границы погрешности может быть представлено в виде $G_n^m(E)/E = 2S$, где

$$S = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \sum_{i=j}^{R\backslash 2} C_n^{i-j}.$$

Для удобства вычислений приведенной границы погрешности необходимо упростить полученное выражение, исключив вычитания в процессе вычисления S по представленному алгоритму одинаковых значений биномиальных коэффициентов. Для этого сумму по индексу i представим двумя полусуммами по четным и нечетным индексам суммирования, разделив положительные и отрицательные слагаемые:

$$S = \sum_{j=0}^{m\backslash 2} (-1)^{2j} \sum_{i=2j}^{R\backslash 2} C_n^{i-2j} + \sum_{j=0}^{m\backslash 2} (-1)^{2j+1} \sum_{i=2j+1}^{R\backslash 2} C_n^{i-2j-1}.$$

Объединив обе полусуммы, после элементарных преобразований, изменив порядок суммирования по i, найдем

$$S = \sum_{j=0}^{m\backslash 2} \left(\sum_{i=0}^{R\backslash 2-2j} C_n^i - \sum_{i=0}^{R\backslash 2-2j-1} C_n^i \right) = \sum_{j=0}^{m\backslash 2} C_n^{R\backslash 2-2j},$$

что и доказывает утверждение 3.

Выполненный анализ границы суммы погрешностей при $k_j = 1$ ($j = [0, m]$) позволяет уточнить ее выражение для случая нечетных m и записать его в окончательном виде:

$$G_n^m = \begin{cases} 2^{1-n} \sum\limits_{j=0}^{m\backslash 2} C_n^{R\backslash 2-2j}, & if \quad m\backslash 2 \neq m/2; \\ 1, & otherwise, \end{cases} \tag{13}$$

где $G_n^m = G_n^m(E)/G_n^0(E)$ — относительное значение границы погрешности, $G_n^0(E) = 2^n E$ — оценка Хемминга $n-$й разности.

Оценим минимальное значение, которое будет при одном слагаемом ($m = 1$) и соблюдении условия существования решения $m\backslash 2 \neq m/2$. Подставив $m = 1$ в выражение (13), найдем $\min\left|G_n^m\right| = G_n^1 = 2^{1-n} C_n^{(1+n)\backslash 2}$, что в силу свойства симметрии биномиальных коэффициентов может быть сведено к упрощенной форме

$$\min\left|G_n^m\right| = 2^{1-n} C_n^{n/2}.$$

Найдем теперь значение m, при котором относительная оценка границы погрешности будет максимальной. Слагаемое $C_n^{R\backslash 2-2j}$ под знаком суммы выражения (13) будет ненулевым при соблюдении условия

$$0 \le R\backslash 2 - 2j \le n; \; j = [0, m\backslash 2].$$

Рассмотрим ограничение слева $0 \le R\backslash 2 - 2j$. Подставив значение $R = n + m$ и максимальное значение $j = m\backslash 2$, найдем $m < n$, удовлетворяющее требованию при возможных сочетаниях нечетных m ($m\backslash 2 \neq m/2$), четных и нечетных n, и примем

$$m = n - 1.$$

Затем рассмотрим ограничение справа $R\backslash 2 - 2j \le n$ в диапазоне возможных значений $j = [0, m\backslash 2]$. Положив $j = 0$, получим, как нетрудно видеть, соотношение $m < n$, позволяющее принять $m = n - 1$ и доставляющее максимум функции (13). Подставив значение $j = m\backslash 2$, найдем дополнительное условие реализации $m + n > 0$, которое не противоречит предыдущему, обеспечивающему максимум функции (13). Следовательно, максимальное значение границы погрешности будет при значениях $m \ge n-1$ и составит величину

$$G_n^{n-1} = 2^{1-n} \sum_{j=0}^{(n-1)\backslash 2} C_n^{(2n-1)\backslash 2-2j} = 1,$$

так как в силу свойств биномиальных коэффициентов [4,5] справедливо тождество

$$\sum_{j=0}^{(n-1)\backslash 2} C_n^{(2n-1)\backslash 2-2j} = \sum_{j=0}^{n/2} C_n^{n/2} = 2^{n-1}.$$

Таким образом, для функции (13), описывающей поведение оценки относительной границы погрешности G_n^m при произвольном задании порядка конечных разностей n и изменении числа суммируемых соседних разностей m, определено положение минимального и максимального значений G_n^m и вычислены ее экстремальные значения

$$\min\left|G_n^m\right| = 2^{1-n} C_n^{n/2}, \qquad if \quad m = 1;$$

$$\max\left|G_n^m\right| = 1, \ if \ m \backslash 2 = m/2 \ \ or \ m \ge n-1.$$

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Для этого, поступая по определению [2], выразим дисперсию $D(E)$ погрешности суммы $m+1$ конечных разностей. На основе равенств (2) и (4), оставив в силе предположение, введенное в работе [2], и считая погрешности представления ординат процесса E_k $(k=[0, n+m])$ одинаково распределенными независимыми случайными величинами с дисперсией $D(e)$, после преобразований получим

$$D(E)/D(e) = \sum_{i=0}^{R}\left[\sum_{j=0}^{m}(-1)^j C_n^{i-j} k_j\right]^2. \qquad (14)$$

Упростим полученное выражение. Для удобства анализа представим правую часть выражения (14), положив $k_j = 1$ $(j=[0,m])$, в виде двух сумм:

$$D(E)/D(e) = S_0^m + S_{m+1}^R,$$

где

$$S_0^m = \sum_{i=0}^{m}\left[\sum_{j=0}^{m}(-1)^j C_n^{i-j}\right]^2, \ S_{m+1}^R = \sum_{i=m+1}^{R}\left[\sum_{j=0}^{m}(-1)^j C_n^{i-j}\right]^2,$$

и упростим каждое из выражений в отдельности.

Изменив последовательно порядок суммирования по индексам j и i, и изменив нижний предел суммирования по j с учетом значения символа Кронекера, получим

$$S_0^m = \sum_{i=0}^{m}\left[\sum_{j=i}^{m}(-1)^j C_n^{j-i}\right]^2.$$

Изменив пределы суммирования, а затем порядок суммирования по переменной суммирования i, придем к окончательному результату на основании теоремы сложения биномиальных коэффициентов

$$S_0^m = \sum_{i=0}^{m}\left(C_{n-1}^i\right)^2.$$

Упростим выражение для S_{m+1}^R. Изменив пределы, затем порядок суммирования по i, а после и по j и, воспользовавшись свойством симметрии биноминальных коэффициентов, окончательно найдем

$$S_{m+1}^{R} = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j} C_{n}^{i-j}\right]^{2}.$$

Подставив найденные значения S_0^m и S_{m+1}^R, представим выражение для дисперсии в виде двух слагаемых:

$$D(E)/D(e) = \sum_{i=0}^{m}\left(C_{n-1}^{i}\right)^{2} + \sum_{i=0}^{n-1}\left[\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j} C_{n}^{i-j}\right]^{2}.$$

Рассмотрим частные случаи.

1) $m = 0$.

Путем подстановки значения m в формулу для дисперсии после очевидных упрощений получим оценку Хемминга

$$D(E)/D(e) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1}\left(C_{n}^{i}\right)^{2} = C_{2n}^{n}.$$

2) $m = n-1$.

Подставив значение m в формулу для дисперсии, получим выражение

$$D(E)/D(e) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(C_{n-1}^{i}\right)^{2} + \sum_{i=0}^{n-1}\left[\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{J} C_{n}^{i-j}\right]^{2},$$

которое можно упростить, приведя слагаемые правой части к виду

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(C_{n-1}^{i}\right)^{2} = C_{2(n-1)}^{n-1}, \quad \sum_{i=0}^{n-1}\left[\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j} C_{n}^{i-j}\right]^{2} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(C_{n-1}^{i}\right)^{2}.$$

Подставив найденные значения, с учетом свойств биномиальных коэффициентов окончательно получим

$$D(E)/D(e) = 2C_{2(n-1)}^{n-1}.$$

Необходимо отметить, что результат сохранится в случае $m > n-1$, так как $C_a^b = 0$ при $b > a$ для $a \geq 0$, $b > 0$. Следовательно, неопределенным остается интервал $0 < m < n-1$.

Исследуем поведение функции $D(E)/D(e)$ на этом интервале.

3) $0 < m < n-1$.

Найдем приращение $D(E)/D(e)$ при изменении верхнего предела суммирования m на единицу

$$Del(m, m-1) = \sum_{i=0}^{R}\left[\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j} C_{n}^{i-j}\right]^{2} - \sum_{i=0}^{R}\left[\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^{j} C_{n}^{i-j}\right]^{2}.$$

Воспользовавшись рекуррентным выражением разности квадратов, представим приращение дисперсии в виде

$$Del(m, m-1) = \sum_{i=0}^{R}\left[(-1)^{m} 2C_{n}^{i-m}\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^{j} C_{n}^{i-j} + \left(C_{n}^{i-j}\right)^{2}\right].$$

Для удобства рассуждений введем обозначения:

$$S_1 = 2(-1)^{m}\sum_{i=0}^{R} C_{n}^{i-m}\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^{j} C_{n}^{i-j}, \quad S_2 = \sum_{j=0}^{R}\left(C_{n}^{i-m}\right)^{2}.$$

Преобразуем S_2, изменив порядок суммирования, и после преобразований сведем к виду

$$S_2 = \sum_{i=0}^{n} \left(C_n^i\right)^2 = C_{2n}^n .$$

В выражении S_1 исключим нулевые слагаемые, изменив нижний предел суммирования по i:

$$S_1 = 2(-1)^m \sum_{i=m}^{R} C_n^{i-m} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j C_n^{i-j} .$$

Изменив пределы суммирования по i и порядок суммирования по j, после преобразований запишем

$$S_1 = -2\sum_{j=1}^{m} (-1)^j \sum_{i=0}^{n} C_n^i C_n^{i-j} .$$

Исключив нулевые слагаемые и воспользовавшись теоремой сложения биномиальных коэффициентов, найдем

$$S_1 = -2\sum_{j=1}^{m} (-1)^j C_{2n}^{n-j} .$$

Подставив найденные значения S_1 и S_2, после ряда преобразований определим

$$Del(m, m-1) = (-1)^m 2C_{2n-1}^{n-m-1} .$$

Зная все разности $Del(i, i-1)$ для интервала $0 \le i \le m$, можно записать

$$D(E) / D(e) = \sum_{i=0}^{m} Del(i, i-1).$$

Подставив выражение для $Del(m, m-1)$ и положив $m = i$, после элементарных преобразований получим

$$D(E) / D(e) = 2\sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_{2n-1}^{n-i-1} . \qquad (15)$$

Упростим полученное выражение, представив его в тождественной форме

$$D(E) / D(e) = 2\left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{2n-1}^{n-i-1} - \sum_{i=m+1}^{n-1} (-1)^i C_{2n-1}^{n-i-1} \right),$$

которое после ряда элементарных преобразований сводится к виду

$$D(E) / D(e) = 2\left(C_{2(n-1)}^{n-1} + (-1)^m C_{2(n-1)}^{n+m} \right). \qquad (16)$$

Проведем анализ полученного выражения как функции числа m суммируемых соседних разностей. При подстановке $m = 0$ получим начальное значение

$$D(E) / D(e) = 2\left(C_{2(n-1)}^{n-1} + C_{2(n-1)}^{n} \right) = C_{2n}^n ,$$

что представляет собой оценку Хемминга отдельной $n-$й разности.

Найдем минимальное относительное значение дисперсии и соответствующее ему значение m. Нетрудно видеть, что функция (16) является убывающим знакопеременным рядом при увеличении m с максимальным начальным значением, равным C_{2n}^n. В силу этого минимальной будет ее величина при $m = 1$, которую можно получить путем подстановки. Выполнив подстановку $m = 1$ в (16), после элементарных преобразований получим

$$D(E) / D(e) = \frac{2}{n+1} C_{2n}^n .$$

Найдем предел, к которому стремится функция (16) при увеличении m. Нетрудно видеть, что $C_{2(n-1)}^{n+m} = 0$ при $m \ge n-1$ и в силу свойств биномиальных коэффициентов выражение (16) приводится к виду

$$D(E) / D(e) = \frac{n}{2n-1} C_{2n}^n .$$

Для удобства дальнейшего анализа введем относительное изменение дисперсии сумм m разностей $n-$го порядка D_n^m, выбрав в качестве нормы оценку Хемминга отдельной $n-$й разности $D_n^0 = C_{2n}^n$.

Характеристики суммо-разностного метода комбинаторной фильтрации с постоянными коэффициентами ($k_j = 1$; $j = [0, m]$), полученные в ходе анализа, приведены в таблице 1.

Таблица 1 — Характеристики метода линейной комбинаторной фильтрации

Граница погрешности	Дисперсия погрешности	*Условие*
$G_n^m = \begin{cases} 2^{1-n} \sum_{j=0}^{m \backslash 2} C_n^{R \backslash 2-2j}, & if \quad m \backslash 2 \neq m/2; \\ 1, & otherwise \end{cases}$	$D_n^m = 2\dfrac{C_{2(n-1)}^{n-1} + (-1)^m C_{2(n-1)}^{n+m}}{C_{2n}^n}$	$m \geq 0$
$\max\left\|G_n^m\right\| = 1$	$\max\left\|D_n^m\right\| = 1$	$m = 0$
$\min\left\|G_n^m\right\| = 2^{1-n} C_n^{n/2}$	$\min\left\|D_n^m\right\| = \dfrac{2}{n+1}$	$m = 1$
$\lim\left\|G_n^m\right\| = 1$	$\lim\left\|D_n^m\right\| = \dfrac{n}{2n-1}$	$m \geq n-1$,

где $\max|\circ|$ — максимальное относительное значение, $\min|\circ|$ — минимальное относительное значение, $\lim|\circ|$ — предельное относительное значение.

На рисунке 1 изображены графики относительных значений границы G_n^m (рисунок 1***а***) и дисперсии D_n^m (рисунок 1***б***) суммы m последовательных $n-$х разностей при изменении m в интервале $m = [0, n]$.

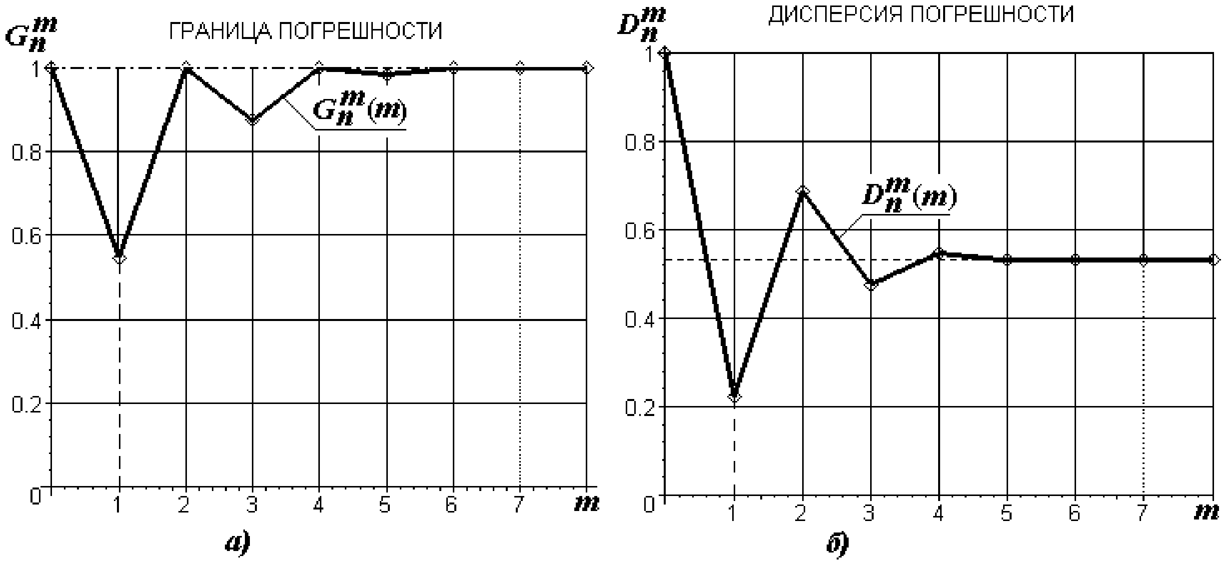

Рисунок 1 — Статистические параметры разностной модели приближения

Таким образом, доказана теорема о возможности улучшения статистических характеристик разностного приближения экспериментальных данных с аддитивной составляющей случайной погрешности.

Следствие. Функции (13) и (16) имеют минимум (соответственно для границы погрешности и дисперсии сумм конечных разностей) при $m = 1$, а при $m \geq n-1$ сохраняют постоянное значение. При ограниченном числе данных минимума погрешности можно достичь суммированием пар соседних разностей $(m = 1)$ благодаря тому, что граница погрешности и дисперсия в этом случае минимальны. Это объясняет эффективность алгоритмов приближения, использующих средние значения [2 – 6] (Бесселя, Стирлинга и др.).

Замечание. Закон распределения погрешности в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей (теоремой Ляпунова) близок к нормальному (как сумма независимых, имеющих один и тот же закон распределения, случайных величин) с нулевым математическим ожиданием в силу разностного принципа процедуры. Дисперсия распределения может быть оценена на основании выражения (16).

Проверка корректности полученных результатов выполнена с помощью имитационной модели. По формуле (4) при значениях $k_j = 1$ ($j = [0, m]$), $m = 1$, $n = 3$ формировался массив случайных погрешностей результатов приближения. В качестве источника шумовой составляющей E_{R+k-i} применен генератор равномерного шума, имитирующего погрешность данных в интервале значений $[0, E]$, где E — максимальное значение шумовой составляющей. Вычисленное значение дисперсии составило величину $Dn = 0{,}00848$ при теоретическом, вычисленном по формуле (16) значении равном $Dx = 0{,}00833$. Оценка дисперсии Хемминга составила величину $Dh = 0{,}01666$. Математическое ожидание близкое к нулю составило величину $M_n = -4 \cdot 10^{-5}$.

На рисунке 2 изображена гистограмма и нанесены графики функций плотности нормального распределения

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_n}} \exp\left(-\frac{(t - M_n)^2}{2D_n} \right)$$

сумм конечных разностей, построенные по результатам имитационного моделирования, и

$$f_h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_h}} \exp\left(-\frac{t^2}{2D_h} \right)$$

по оценке Хемминга. Линии L_n и ограничивают зоны, где погрешность лежит в пределах принятой максимальной погрешности шума $E = 0{,}1$. Доверительная вероятность [7] этого составила для рассмотренного алгоритма комбинаторного приближения

$$P_n = \int_{-E}^{E} f_n(t)dt = 0{,}727 \quad \text{и} \quad P_h = \int_{-E}^{E} f_h(t)dt = 0{,}561$$

по оценке Хемминга без применения процедуры приближения (при $m = 0$).

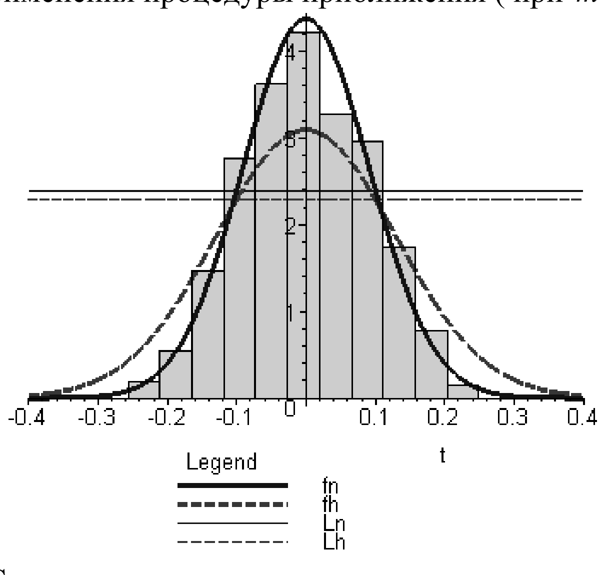

Рисунок 2 — Статистические характеристики распределения погрешности

Таким образом, полученный результат свидетельствует о принципиальной возможности снизить пессимистичность оценок Хемминга.

Обобщенные оценки могут найти применение в технологических и автотранспортных системах, в устройствах адаптивного управления стохастическими техническими объектами в форме критериев оценки качества адаптации [8], в частности, ЧПУ механообработкой при моделировании процессов формообразования [1], стойкости инструмента и решении задач, связанных с синтезом моделей и устройств диагностики, прогноза развития процесса.

Выводы

1. Показана возможность повышения точности реализации технологических и технических процессов путем снижения влияния помехи с помощью комбинаторной фильтрации, не искажающей фильтруемый сигнал.

2. При допустимости замены сигнала его средним значением возможно повышение эффекта фильтрации за счет процедуры усреднения значений разностей, при которой уровень шумовой составляющей снижется обратно пропорционально числу усредняемых значений, что актуально в области низких и инфранизких частот.

3. Существует возможность улучшения качества фильтрации за счет оптимального выбора весовых коэффициентов суммируемых разностей.

Список использованной литературы

1. Братан С.М. Построение подсистемы динамической диагностики для оценки непосредственно наблюдаемых параметров при чистом и тонком шлифовании / С.М. Братан // Ресурсозберігаючі технології виробництва та обробки тиском матеріалів у машинобудуванні: зб. наук. пр. — 2004. —Ч. 2. — С. 182 – 191.
2. Hamming R.W. Numerical methods for scientists and engineers / R.W. Hamming. — N.Y.: McGraw-Hill Book Company, 1973. (Хемминг Р.В. Численные методы / Р.В. Хемминг. — М.: Наука, 1972.— 400 с.).
3. Гутер Р. С. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта / Р. С. Гутер, В. В. Овчинский. — М.: Наука, 1970. — 432 с.
4. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения / под ред. К. А. Рыбникова. — М.: Наука, 1982— 368 с.
5. Риордан Дж. Комбинаторные тождества / Дж. Риордан. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
6. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979.— 830 с.
7. Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. — М.: Высш. шк., 2000.—383 с.
8. Бодянский Е. В. Адаптивные модели в системах управления техническими объектами / Е. В. Бодянский, О. Г. Руденко. — К.: УМК ВО Украины, 1988. —202 с.

Надійшла до редакції: 18.02.2012 р.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Зорі А.А.

V.P. Dolgin. Method of combinatorial filtration. *The method of synthesis of combinatorial filtration procedure, making better the signal – noise relation, is expounded. Statistical estimations of result of filtration of additive noise and their scope values are got. The results of imitation simulation are resulted.*

Keywords: *noise, filtration, variance, expected value, probability, authenticity, mathematical model, law of distributing.*

В.П. Долгін. Метод комбінаторної фільтрації. *Висловлена методика синтезу процедури комбінаторної фільтрації, поліпшуюча відношення сигнал – шум. Отримані статистичні оцінки результату фільтрації адитивної перешкоди і їх граничні значення. Приведені результати імітаційного моделювання. Отримані характеристики якості фільтрації.*

Ключові слова: *перешкода, фільтрація, дисперсія, математичне очікування, вірогідність, достовірність, математична модель, закон розподілу.*