ПРИМЕНЕНИЕ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОЦЕССЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Смолий В.В.
Кафедра КИ, СТИ ВУГУ
vsmoleay@sti.lg.ua

Abstract

Smoleay V.V. Application of conformal reflections in process of geometrical transformations of the images of dynamic objects. *The new theoretical basics of geometrical transformations of images are presented. The mathematical model of data structure and its transformation are described.*

Геометрические преобразования являются одной из важнейших задач, решаемых в компьютерной графике в процессе обработки и синтеза изображений. Распространенным способом выполнения преобразований являются аффинные преобразования [1,2]. Это связано с характером представления изображений в вычислительных системах. Эти изображения описываются совокупностью дискретных значений функции яркости (цветности) определенных в заданных узлах прямоугольной сетки декартовой системы координат. Такая форма представления получила широкое распространение прежде всего из за особенностей аппаратной реализации средств вычислительной техники (СВТ). Следует отметить, однако, что на этапе становления ВТ предлагались и другие, альтернативные, методы формирования изображений для вывода информации [1,3].

Растровый способ развертки изображений в современных СВТ связан с высокими вычислительными затратами, что затрудняет отображение динамически изменяющихся данных, представляемых в графическом виде в режиме реального времени. Решение этих вопросов необходимо при создании средств графического вывода центров оперативного взаимодействия, систем управления навигационного типа, дистанционного управления и им подобных. В таких системах, для каждого контролируемого объекта синтезируется условное графическое обозначение, направление ориентации которого и положение будут, в дальнейшем, зависеть от ориентации и направления реального объекта.

Для решения таких задач, как правило, используют многопроцессорные вычислительные системы или среды [4], обладающие высокой вычислительной производительностью, требующие использования специального программного обеспечения и дорогостоящие, а так же, в некоторых случаях, векторное представление графической информации.

В процессе геометрических преобразований можно выделить два типа операций – вращение и перемещение. В декартовой системе координат эти преобразования описываются известными формулами аффинных преобразований, основным недостатком которых является выполнение большого количества вычислений с плавающей запятой при выполнении операции поворота изображений. Известны системы координат, в которых операция поворота осуществляется с меньшими вычислительными затратами [5]. Предлагаемый механизм геометрических преобразований заключается в том, что с целью минимизации вычислительных затрат, структуры данных, описывающие изображения динамических объектов, адаптированы к выполнению операций вращения и перемещения путем представления данных в оптимальных, для выполнения данных операций, системах координат. Операция поворота будет осуществляться в полярной системе координат (ПСК), а операция перемещения - в декартовой (ДСК). В этом случае требуется преобразование описания изображения при переходе из одной системы координат в другую, представленное на рис.1., которое реализуется для достижения максимального быстродействия аппаратными средствами. Учет особенностей аппаратной реализации СВТ приводит к следующим ограничениям:

– приоритетной является растровая форма представления изображений;
– для хранения описаний изображений используются двумерные массивы элементов памяти.

Математической основой предложенного принципа геометрических преобразований является теория функций комплексных переменных [6-8], в частности, раздел теории конформных отображений.

Изображение рассматривается как замкнутая область пространства. При отображении устанавливается однозначное соответствие между точками соответствующих областей различных координатных систем (однолистное отображение).

По определению [6], функция $\omega=f(z)$, регулярная в области B или имеющая там в качестве особых точек только полюсы (мероморфная в B), однолистно отображает область B плоскости Z на некоторую область B′ плоскости ω, если она устанавливает взаимно однозначные соответствие между точками областей B и B′. При однолистном отображении $\omega=f(z)$ области B на B′ производная $f'(z)$ отлична от 0 во всех помеченных точках области B, в которых $f(z)$ регулярна. Условия неравенства нулю производной означает, что имеется конформное отображение. По этому однолистное отображение называется так же однолистным конформным (в случае односвязных областей — просто конформным) отображение области B на область B′: функция $\omega=f(z)$, совершающая однолистное конформное отображение, называется однолистной функцией.

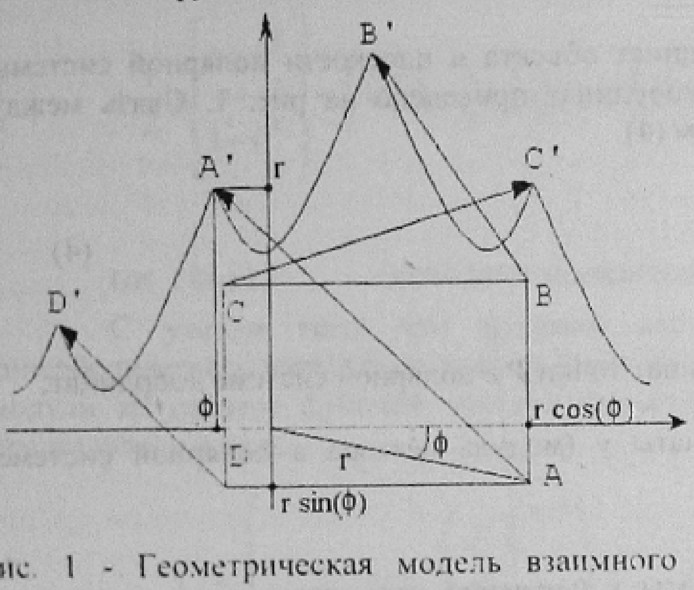


Рис. 1 - Геометрическая модель взаимного отображения областей декартовой и полярной систем координат.

Для того, что бы однолистно отображать две односвязные области друг на друга, достаточно знать их отображение на какую-либо одну стандартную область, например, на заданный круг, ибо требуемое отображение тогда можно получить, отобразив сперва одну из областей на круг, а затем круг на другую область. Такое отображение не возможно в двух случаях: когда область есть вся плоскость, и когда она имеет единственную граничную точку (пунктирная плоскость).

Среди различных функций, осуществляющих однолистное отображение односвязных областей друг на друга, важное теоретическое значение имеют функции наиболее употребительных конформных отображений. В частности, такие, в которых ортогональная сетка переходит в прямоугольную декартову сеть. К таким функциям относится, например, линейная функция:

$$\omega = Az + B; \left(A = \rho e^{\varphi i}\right). \tag{1}$$

представляющая собой композицию трех преобразований:

$\arg A = t = e^{\varphi i} z$ - поворот плоскости на угол φ;

$|A| = S = \rho t$ - подобное растяжение в ρ раз;

$\omega = S + B$ - параллельный сдвиг на В;

В результате, фигуры в плоскости Z преобразуются в себе подобные, дополнительно поворачиваясь и сдвигаясь.

Определим правила преобразования координат при переходе из одной формы представления (системы координат) в другую. Воспользуемся для этого моделью представления данных в форме комплексных чисел и функций комплексной переменной [7,8].

Такой выбор обусловлен тем, что плоскость комплексных чисел отображается как на плоскость с декартовой системой координат, так и на плоскость с полярной системой координат:

а) отображение точки на плоскость с декартовой системой координат:

$$P = A \cdot e^{j\varphi} = A(\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) \to (A \cdot \cos\varphi, A \cdot \sin\varphi) \tag{2}$$

б) отображение точки на плоскость с полярной системой координат:

$$P = A \cdot e^{j\varphi} = A(\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) \to (A, \varphi). \tag{3}$$

Совместное отображение координат объекта и плоскости полярной системы координат в прямоугольную системе координат приведено на рис. 1. Связь между координатами определяется по формулам (4)

$$\begin{cases} y' = \sqrt{x^2 + y^2} = |P| = A \\ x' == Arg(P) = \varphi \end{cases}, \tag{4}$$

где (A, φ) - исходное значение координат точки ***P*** в полярной системе координат;

y\` - новое значение координаты y (модуль вектора в полярной системе координат, рис. 1);

x\` - новое значение координаты x (значение угла направления вектора в полярной системе координат φ);

(x,y) - исходное значение координат точки ***P*** в декартовой системе координат.

При представлении координат комплексными числами в экспоненциальной форме, новые координаты определяются по соотношениям:

$$\begin{cases} x' = \mathrm{Im}[\ln(P)] = \dfrac{\ln(P) - \overline{\ln(P)}}{2} \\ y' = e^{\mathrm{Re}[\ln(P)]} = e^{\frac{\ln(P) + \overline{\ln(P)}}{2}} \end{cases} \tag{5}$$

Если процесс преобразования рассматривать как отображение точек одной плоскости комплексных значений на другую плоскость комплексных значений, то, в общем виде, данное преобразование в соответствии с формулой (5) представляется в виде:

$$P' = \frac{\ln(P) - \overline{\ln(P)}}{2} + i \cdot e^{\left[\left(\ln(P) + \overline{\ln(P)}\right) 2\right]}. \qquad (6)$$

На основании свойств функции натурального логарифма, формулу (6) можно преобразовать к виду:

$$P' = x' + i \cdot y' = \frac{\ln\left(\frac{P}{\bar{P}}\right)}{2} + i \cdot e^{\left[\frac{\ln(P \cdot \bar{P})}{2}\right]}, \qquad (7)$$

где (x', y') - значения координат точки в новой плоскости с прямоугольной системой координат.

Дальнейшие преобразования для элементов формулы (7) дают следующие результаты:

$$x' = \frac{\ln\left(\frac{P}{\bar{P}}\right)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{x+iy}{x-iy}\right] = \frac{1}{2}\ln\left[x \cdot \frac{1+i\frac{y}{x}}{1-i\frac{y}{x}}\right] = \qquad (8)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+i\frac{y}{x}}{1-i\frac{y}{x}}\right] + \frac{1}{2}\ln[x] = \frac{1}{2}\ln[x] + arth\left(i\frac{y}{x}\right)$$

где (x.y) - исходные значения координат для искомой точки.

С учетом того, что функции натурального логарифма и арктангенса гиперболического могут быть представлены в виде степенных рядов, при условии, что модули аргументов функций меньше единицы, то значение x' для (8) может быть представлено в виде:

$$x' = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{2n-1}}{2n+1}\right]. \qquad (9)$$

Значение аргумента функции можно ограничить «1», осуществляя преобразования в нормированной системе координат.

Значение второй составляющей координаты из (7) определяется формулой (10):

$$y' = e^{\left[\frac{\ln(P \cdot \bar{P})}{2}\right]} = \sqrt{P \cdot \bar{P}} = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (10)$$

И в результате преобразований формула (7) примет вид (11):

$$P' = \frac{\ln\left(\frac{P}{\bar{P}}\right)}{2} + i \cdot e^{\left[\frac{\ln\left(P \cdot \bar{P}\right)}{2}\right]} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{2n+1}}{2n+1}\right] + i \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (11)$$

С математической точки зрения, формулы (9-10) задают параметрические уравнения преобразования координат, которые могут рассматриваться как композиция конформных преобразований. Анализ формул и свойства функции натурального логарифма указывают на наличие при осуществлении преобразований особой точки с исходными координатами (0,0). С прикладной точки зрения это означает, что в результате преобразований мы не можем однозначно определить положение данной точки в новой плоскости. Однако, преобразование формулы (8) при переходе к форме степенных рядов, состоящее в замене функции $\ln(x)$ на функцию $\ln(1+x)$ устраняет данную неоднозначность, не нарушая структуры преобразования и не влияя на вид изображения. Значение n, используемое в разложении в степенные ряды, может быть оценено исходя из погрешности, возникающей при последующем переводе точки из плоскости с полярными координатами в плоскость прямоугольных декартовых координат.

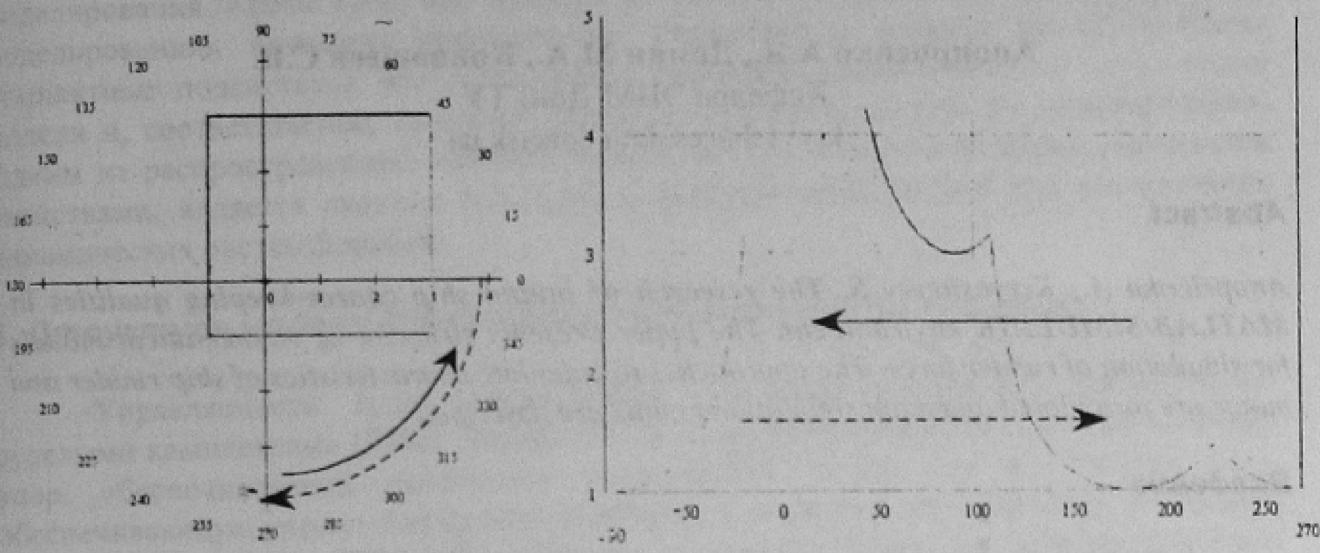
Отображение области из полярной системы координат в область декартовой системы координат осуществляется на основании тригонометрической формы записи комплексного числа по формуле (2). Учитывая необходимость нормирования координат для расчета по формуле (9), получаем, что аргументами для упомянутой функции могут быть соответствующие значения косинуса (для координаты x) и синуса (для координаты y) для направляющего вектора искомой точки в его описании для полярной системы координат, можно сделать предположение, что процесс взаимного отображения областей в различных системах координат можно значительно ускорить и упростить, используя таблицу функциональных преобразований. Анализируя характер функций синуса и косинуса, приходим к выводу, что, учитывая фазовый сдвиг между этими функциями и симметричность окружности относительно точки начала координат, для представления численных значений в функциональных таблицах достаточно значений углов в диапазоне от 0 до 45 градусов.

Положительной особенностью в использовании функциональных таблиц является то, что при «нанесении» на них специальной разметки, соответствующей описанию изображения, например, в относительных значениях в полярной системе координат [5], появляется возможность параллельной обработки координат нескольких вершин, изменяя (сдвигая) значения индекса углового направления относительно содержимого самой таблицы (рис. 2).

Выводы

Вычислительная трудоемкость геометрических преобразований изображений снижается при использовании для их описания локальных координатных систем, оптимальных для выполнения операций вращения и перемещения. Для выполнения операции вращения оптимальным является использование полярной системы координат, а для операции перемещения – декартовой системы координат. Математической основой взаимного отображения структур данных, описывающих изображения в полярной и декартовой системах координат, и операций геометрических преобразований является теория функций комплексного переменного и ее раздел конформных преобразований. Установление однозначного соответствия координат и операцию вращения целесообразно выполнять при помощи функциональных таблиц преобразования.

Рассмотренные принципы преобразования изображений минимизируют трудоемкость преобразований, и при аппаратной реализации дают возможность визуализировать состояния динамических объектов в режиме реального времени.



а) б)

а) вращение прямоугольников полярной системе координат;

б) направление сдвига индексов в двумерном массиве элементов функциональной таблицы, соответствующего операциям поворота, показанным на рис.а:

Рис. 2 – Геометрическая модель преобразования координатных систем с выполнением операции вращения.

Литература

1. У. Ньюмен. Р. Спрулл «Основы интерактивной машинной графики»- М.:Мир. - 1976г. -573 с.
2. Фоли Дж., Вэн Дэм А. Основы интерактивной графики. В 2-х книгах/Пер. с . англ. – Мир. 1985, 368 с.
3. Системы отображения информации: учеб. пособие для ВУЗов/ Т.М.Алиев. Д.И.Вигдоров. В.П.Кривошеев.- М.: Высш.шк., - 1988. - 223 с.: ил.
4. СБИС для распознавания образов и обработки изображений: пер. с англ./ под ред. К.Фу.- М.: Мир. - 1988. - 248 с.: ил.
5. Математические основы повышения эффективности графических преобразований в системах реального времени/ Смолий В.В.// Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах.-1999.- №1.-С.102-107.
6. Г.М.Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного.- М.:Наука., - 1966. - 628 с.
7. Бронштейн И.Н.. Семендяев К.А. Справочник по математике.Изд.тринадцатое.-М.:Наука. - 1986. - 544 с.
8. Г. Корн, Т. Корн Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. Изд.второе.- М.:Наука., - 1970. - 720 с.

Поступила в редакційну колегію 20.05.2000 р.