УДК 629.7.018.7:681.3.06:621.396.96

А.В. Мильштейн (асп.), В.В. Паслен (канд. техн. наук, доц.)
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк
кафедра радиотехники и защиты информации
E-mail: alexander235@rambler.ru

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА ОПТИМАЛЬНОГО СГЛАЖИВАНИЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ДАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Предложен универсальный итеративный алгоритм определения статистической оценки вектора коэффициентов сглаживающего полинома для реализации сглаживания путем совместной обработки данных траекторных измерений, обладающих пространственной и временной избыточностью. Рассмотрен способ поиска начального приближения вектора коэффициентов сглаживающего полнома и его максимально правдоподобной оценки. Описаны два способа определения начального приближения вектора коэффициентов сглаживающего полинома на текущем шаге локально-скользящего сглаживания.
Ключевые слова: *базисная функция двух переменных, первичные и вторичные координаты, сглаживающий полином, траекторные измерения, вектор, начальное приближение.*

Общая постановка проблемы

В различных точках пространства с известным местоположением установлено произвольное число станций (например, РЛС, КТС и другие), измеряющих по одной или несколько первичных координат каждая на множестве равноотстоящих и точно известных моментов *t*. Благодаря совместным измерениям создается пространственная и временная избыточность информации о местоположении объекта. Многопараметрический вектор ξ измерений включает первичные координаты любого типа на интервале согласования *n*:

$$\xi^T = \left| \xi_1^{'} ... \xi_i^{'} ... \xi_n^{'} ... \xi_1^{j} ... \xi_i^{j} ... \xi_n^{j} ... \xi_1^{N} ... \xi_i^{N} ... \xi_n^{N} \right|, \qquad (1)$$

где ξ_i^j — данные измерений *j* первичной координаты в *i* момент времени, $j = 1,\dots, N$, $i = 1,\dots, n$.

Каждый элемент из множества (1) состоит из неизвестного истинного значения измеряемой первичной координаты $\xi_{i_{èñ}}^j$ и неизвестного значения ошибки измерений $\Delta\xi_i^j$:

$$\xi_i^j = \xi_{i_{èñ}}^j + \Delta\xi_i^j .$$

Необходимо по имеющейся первичной информации, в общем случае обладающей пространственной и временной избыточностью, для любого заданного момента времени с возможно большей точностью и достоверностью при достаточном быстродействии определить в декартовой системе координат вторичные параметры положения летательного аппарата, которые предусмотрены программой испытаний. При этом для рассматриваемых в работе стохастических траекторий на участках локально-скользящего сглаживания положение летательного аппарата может быть представлено с помощью базисной функции и некоторого заранее неизвестного числа компонент вектора *A* — коэффициентов сглаживающего полинома. При этом предполагается, что:

- систематические ошибки исключены введением поправок;
- неравноточность данных измерений учитывается введением весовой матрицы $\Lambda = B^{-1}$, где *B* — корреляционная матрица.

Постановка задач исследования

Для решения поставленной задачи необходимо:

- разработать алгоритм совместной реализации пространственной и временной избыточности данных траекторных измерений с целью определения вторичных параметров положения летательных аппаратов и других объектов измерений и исследований;
- обосновать выбор структуры и параметров системы линейно независимых и Λ-ортогональных базисных функций для разработанного алгоритма;
- обосновать рациональный способ выбора начального приближения вектора коэффициентов сглаживающего полинома.

Алгоритм решения задач

В работах [1–3] было отмечено, что для полиномиального описания стохастических траекторий при совместной реализации пространственной и временной избыточности вводится система базисных функций и вектор коэффициентов сглаживающего полинома, состав и величина которого подлежат определению в ходе обработки. В работах [2, 3] были определены две клеточно-матричные структуры базисных функций для осуществления сглаживания путем совместной обработки данных ВТИ, обладающих пространственной и временной избыточностью.

Стохастический характер траектории летательного аппарата вносит существенную особенность в решение задачи оптимальной оценки вектора A — коэффициентов сглаживающего полинома, которая состоит в том, что оптимальная оценка коэффициентов сглаживающего полинома должна быть увязана с определением их состава. Это приводит к необходимости получения статистически независимых оценок коэффициентов сглаживающего полинома. Ввиду того, что стохастический характер траекторий трудно совместим с их высокой априорной определенностью, прикладные методы обработки данных траекторных измерений целесообразно строить на основе статистических методов, не связанных с использованием априорной информации о распределении составляющих вектора A — коэффициентов сглаживающего полинома. В связи с тем, что векторы ξ-измерений и коэффициентов сглаживающего полинома являются многомерными случайными величинами, взаимное соответствие между ними определяется совместной плотностью вероятности.

Из-за нелинейной зависимости вектора измерений от вектора коэффициентов сглаживающего полинома, решение задачи по определению максимально правдоподобной оценки (МПО) вектора $\hat{A}$ целесообразно искать методом последовательных приближений. Для совместной реализации пространственной и временной избыточности данных измерений с целью определения статистической оценки (СО) вектора A — коэффициентов сглаживающего полинома, в работах [4, 5] получен универсальный итеративный алгоритм

$$\hat{A}_{\nu+1} = \hat{A}_\nu + \Delta\hat{A}_\nu = \hat{A}_\nu + (J_\nu^T \Lambda J_\nu)^{-1} J_\nu^T \Lambda \{\xi - \xi[r(t, A_\nu)]\}, \qquad (2)$$

где J — Якобиева матрица частных производных от измеряемых по вычисляемым параметрам;

ν — номер ν-го приближения;

$J_\nu^T \Lambda J_\nu$ — основная матрица системы уравнений на ν-ом шаге приближения;

Λ — весовая матрица ошибок измерений.

Из (2) следует, что СО достигается через ряд последовательных приближений, в которых основным моментом является решение линеаризованной системы уравнений с целью определения вектора поправки $\Delta\hat{A}_\nu$.

Указанный алгоритм инвариантен к закону распределения ошибок траекторных измерений, что очень важно для его практической реализации. К законам распределения ошибок измерений остаются чувствительными лишь свойства полученной с помощью этого алгоритма СО:

– при нормальном законе — это максимально правдоподобная оценка;

– при других законах — это минимально квадратичная оценка.

Алгоритм совместной реализации пространственной и временной избыточности многопараметрических данных траекторных измерений строится на основе соотношения (2). Из соотношения (2) видно, что для начала итеративного процесса необходимо иметь начальное приближение вектора коэффициентов сглаживающего полинома. Начальное приближение, необходимое для начала итеративного процесса, может быть получено путем совместного линейного сглаживания прямоугольных координат, полученных одним из простых методов. Для этого необходимо решить систему уравнений вида:

$$\varphi^T \varphi C = \varphi^T r^*, \tag{3}$$

где C — вектор-столбец коэффициентов полинома;

φ — базисная функция;

r^* — вектор-столбец вторичных координат, рассчитанный одним из простых методов по минимально необходимому набору первичных измерений ξ^*;

$\varphi^T \varphi$ — основная матрица системы уравнений;

T — знак транспонирования.

Умножив (3) слева на матрицу, обратную основной матрице, получим решение системы уравнений в виде вектора коэффициентов полинома:

$$\hat{C} = (\varphi^T \varphi)^{-1} \varphi^T r^*, \tag{4}$$

где $\hat{C}$ — вектор-столбец, состоящий из оценок коэффициентов полинома.

Как видно из работ [6-12], система линейных уравнений (3) имеет единственное решение, если определитель основной матрицы системы уравнений не равен нулю, то есть $\det(\varphi^T \varphi) \neq 0$. При использовании базисных функций, описанных а работах [2, 3], основная матрица системы уравнений (3) является симметричной [7, 8, 11, 13]. Определитель такой матрицы является определителем Грама. Из линейной алгебры [6, 9, 12] известно, что определитель Грама больше нуля, если система базисных функций является линейно независимой. Умножив (4) слева на матрицу φ, получим начальное приближение вектора вторичных координат в виде:

$$\hat{r}_0 = \varphi \hat{C} = \varphi (\varphi^T \varphi)^{-1} \varphi^T r^*. \tag{5}$$

Пересчитав сглаженные значения начального приближения вторичных координат по известным формулам [14] в первичные координаты, получим начальное приближение первичных координат $\hat{\xi}_0$.

Из вышеизложенного можно установить общую последовательность решения задачи о нахождении начального приближения вектора коэффициентов сглаживающего полинома, а также начальные приближения первичных и вторичных координат в следующем виде:

$$\xi^* \to r^* \to \varphi \to \varphi^T \varphi \to (\varphi^T \varphi)^{-1} \to (\varphi^T \varphi)^{-1} \varphi^T \to \hat{C}_0 \to \hat{r}_0 \to \hat{\xi}_0. \tag{6}$$

Следующим этапом построения алгоритма совместной реализации пространственной и временной избыточности данных траекторных измерений является нахождение МПО вектора коэффициентов сглаживающего полинома методом последовательных приближений.

В общем виде последовательность решения задачи после нахождения начального приближения вектора коэффициентов сглаживающего полинома можно представить в виде:

$$\overleftarrow{\hat{C}_v \to \hat{r}_v \to \hat{\xi}_v \to \Delta\hat{\xi}_v \to \Phi_v \to \Delta\hat{C}_v \to \hat{C}_{v+1} \to \hat{r}_{v+1} \to \left|\Delta\hat{r}_v\right| > \varepsilon \to}; \tag{7}$$

где номер приближения v = 1, 2, …и до тех пор, пока $\Delta\hat{r}_v$ в любой точке интервала сглаживания не станет меньше ε = 0,1, … , 0,5 м;

$\Phi = F\varphi$ — Якобиева матрица;

F — матрица проекций градиентов.

Из работ [13, 15] известно, что при использовании линейно независимой базисной функции (ЛНБФ) оценки коэффициентов сглаживающего полинома оказываются взаимно коррелированными. Это обстоятельство затрудняет оценку точности определения сглаженных параметров и построение адаптивных алгоритмов. Кроме того, применение при сглаживании ЛНБФ приводит [13] к:

- необходимости составления и повторного решения системы уравнений при изменении порядка ЛНБФ;
- снижению точности вычислений, если система ЛНБФ такова, что заметно снижается обусловленность основной матрицы системы уравнений, вследствие чего ее определитель приближается к нулю.

От перечисленных недостатков позволяет избавиться применений Λ-ортогональных базисных функций (Λ-ОБФ). Известно [13, 15], что Λ-ОБФ обладает рядом преимуществ перед ЛНБФ:

- решение системы уравнений в этом случае распадается на ряд уравнений для независимого вычисления оценок коэффициентов сглаживающего полинома, при этом оценка каждого коэффициента выражается через данные измерений и значение только одной соответствующей ему функции;
- исключается необходимость пересоставления и повторного решения системы уравнений при изменении степени аппроксимирующего полинома. Экспериментальная проверка при $3(m_{\max}+1) \le 21$ показала, что отбраковка незначимых коэффициентов приводит к небольшой расстройке Λ-ортогональности, о величине которой можно делать выводы по значениям недиагональных элементов основной матрицы;
- обеспечивается возможность оптимизации степени и структуры сглаживающего полинома.

При применении Λ-ОБФ (для нахождения МПО вектора коэффициентов сглаживающего полинома итеративным методом) последовательность действий по определению МПО можно представить в следующем виде:

$$\overleftarrow{\hat{C}_v \to \hat{r}_v \to \hat{\xi}_v \to \Delta\hat{\xi}_v \to \Phi_v \to P_v \to J_v \to \hat{A}_v \to \Delta\hat{A}_v \to \Delta\hat{A}_{v+1} \to \hat{r}_{v+1} \to \left|\Delta\hat{r}_v\right| > \varepsilon} \to \qquad (7)$$

где номер приближения v = 1, 2, …и до тех пор, пока $\Delta\hat{r}_v$ в любой точке интервала сглаживания не станет меньше ε = 0,1, … , 0,5 м;

$\Phi_v = F_v\varphi_v$, $J_v = F_v P_v$ — Якобиевы матрицы, построенные соответственно на ЛНБФ φ и Λ-ОБФ P на v шаге приближения;

F_v — матрица проекций градиентов на v шаге приближения.

Следует иметь ввиду, что для построения очередного приближения $\hat{A}_{v+1}$ найденная поправка $\Delta\hat{A}_v$ должна быть сложена с $\hat{A}_v$, соответствующими той же системе Λ-ОБФ P_v, а не с $\hat{C}_v$, соответствующими системе ЛНБФ φ_v. Для этого ранее найденный вектор $\hat{C}_v$ должен быть преобразован в вектор $\hat{A}_v$ путем линейного преобразования:

$$A_v = U_v^{-1} C_v,$$

где U_v — матрица, обеспечивающая линейную связь между C_v и A_v на v шаге приближения к МПО объекта в пространстве.

Известно [13, 16], что сглаживание в целом представляет способ одновременной обработки данных измерений, полученных на всех траектории. При статистической оценке случайных траекторий большой протяженности сглаживание в целом приводит к необходимости использования полиномов высокого порядка, что усложняет обработку и приводит к накоплению ошибок вычислений. При уменьшении порядка аппроксимирующего полинома возникает чрезмерное сглаживание, которое приводит к большим методическим ошибкам. Для устранения недостатков, существующих при сглаживании в целом, применяется локально-скользящее сглаживание (ЛСС) [13, 14]. При этом после выполнения каждого шага обработки используется только наиболее точная часть результатов, расположенных в средней части интервала сглаживания. Исключение составляют только концы траектории, где вынуждено используются результаты от середины интервала сглаживания до ближайшего конца траектории. На каждом шаге ЛСС начальное приближение может бать получено одним из двух способов [13, 14].

Первый способ заключается в совместном линейном сглаживании на каждом шаге ЛСС прямоугольных координат, полученных простыми методами перед началом итеративного процесса. В этом случае на каждом шаге ЛСС решается система уравнений (3) и выполняется последовательность вида (6).

Второй способ состоит в следующем: на первом шаге ЛСС решается система уравнений (3) и выполняется последовательность вида (6), а на последующих шагах ЛСС в качестве начального приближения берется устойчивая МПО, полученная на предыдущем шаге сглаживания. Однако в этом случае необходимо помнить об обратном линейном преобразовании МПО вектора коэффициентов сглаживающего полинома к исходной системе ЛНБФ для его использования на следующем шаге ЛСС.

Выводы

1. Предложен универсальный итеративный алгоритм для определения статистической оценки вектора коэффициентов сглаживающего полинома для совместной обработки данных траекторных измерений, обладающих пространственной и временной избыточностью.

2. В работе обоснован рациональный способ выбора начального приближения вектора коэффициентов сглаживающего полинома, необходимого для начала итеративного процесса нахождения его МПО.

3. Определен алгоритм нахождения начального приближения вектора коэффициентов сглаживающего полинома и определения его МПО.

Список использованной литературы

1. Башков Е. А. Адаптивное нелинейное оптимальное сглаживание многопараметрических данных измерений / Е. А. Башков, В. В. Паслен // Университетские микроспутники — перспективы и реальность: междунар. науч.-практ. конф. / НЦАОМ им. А. М. Макарова. — Днепропетровск, 2006. — С. 67.
2. Мильштейн А. В. Метод нелинейного сглаживания в обработке данных траекторных измерений / А. В. Мильштейн, В. В. Паслен // Зб. наук. праць Донецького інституту залізничного транспорту. — 2011. — Вип. 28. — С. 94–101.
3. Мильштейн А. В. Выбор структуры ортогональных базисных функций / А. В. Мильштейн, В. В. Паслен // Новітні технології в телекомунікаціях: V Міжнарод. наук.-техн. сімпозіум, 17–21 січня 2012 р. : зб. тез. — К., 2012. — С. 93–95.
4. Огоднийчук Н. Д. Исследования на ЭВМ свойств систем ЛНБФ и Λ-ОБФ как функции двух аргументов / Н. Д. Огоднийчук, В. В. Паслен, С. В. Велигдан // Радиоэлектронное оборудование летательных аппаратов. — 1989. — Вып. 3. — С. 90–93.
5. Огоднийчук Н. Д. Алгоритм совместной реализации пространственной и временной избыточности данных внешнетраекторных измерений / Н. Д. Огоднийчук, В. В. Паслен // Радиоэлектронное оборудование летательных аппаратов. — 1989. — Вып. 3. — С. 85–89.
6. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа: справочное руководство / Корнелий Ланцош: пер. с англ. М. З. Кайнера. — М.: Наука, 1961. — 524 с.
7. Грантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Грантмахер. — М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1968. — 552 с.

8. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер : пер. с англ. — М. : Наука : глав. ред. физ.-мат. лит., 1962. — 280 с.
9. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры / В. В. Воеводин. — М. : Наука : глав. ред. физ.-мат. лит., 1977. — 300 с.
10. Валеев К. Г. Расщепление спектра матриц / К. Г. Валеев. — К. : Вища шк., 1986. — 272 с.
11. Боревич З. И. Определители и матрицы : учеб. пособие для вузов / З. И. Боревич. — М. : Наука : глав. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 184 с.
12. Фадеев Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фадеев, В. Н. Фадеева. — М. : Физматгиз, 1963. — 736 с.
13. Огоднийчук Н.Д. Обработка траекторной информации. Ч. II / Н. Д. Огороднийчук. — К. : КВВАИУ, 1986. — 224 с.
14. Огоднийчук Н. Д. Обработка траекторной информации. Ч. 1 / Н. Д. Огороднийчук. — К. : КВВАИУ, 1981. — 141 с.
15. Огоднийчук Н. Д. О прикладных методах анализа траекторной информации // Сборник материалов НТК, посвященной 25-летию училища. Ч.1 / Н. Д. Огороднийчук. — К.: КВВАИУ, 1977. — С. 65–84.
16. Жданюк Б. Ф. Основы статистической обработки траекторной информации / Б. Ф. Жданюк. — М. : Сов. радио, 1978. — 384 с.

Надійшла до редакції: 02.03.2012 р.

Рецензент: д-р пед. наук, проф. Стефаненко П.В.

A.V. Milshtein, V.V. Paslon. Construction the optimal smoothing algorithm of polyvalent data of measurements. *The universal iterative algorithm of definition the statistical estimation of the vector of coefficients of smoothing polynomial for implementation the smoothing by joint processing the data of trajectory measurements with spatial and temporal redundancy was offered. A method of search the initial approximation of the vector of coefficients of smoothing polynomial and its maximum verisimilar estimation was considered. The two ways of definition the initial approximation of the vector of coefficients of smoothing polynomial at the current step of locally sliding smoothing were described.*
Keywords: *basic function of two variables, primary and secondary coordinates, smoothing polynomial, trajectory measurements, vector, initial approximation.*

О.В. Мільштейн, В.В. Пасльон. Побудова алгоритму оптимального згладжування багатопараметричних даних вимірювань. *Запропоновано універсальний ітеративний алгоритм визначення статистичної оцінки вектора коефіцієнтів згладжувального полінома для реалізації згладжування шляхом спільної обробки даних траєкторних вимірювань, що володіють просторовою і часовою надмірністю. Розглянуто спосіб пошуку початкового наближення вектора коефіцієнтів згладжувального полінома і його максимально правдоподібною оцінки. Описано два способи визначення початкового наближення вектора коефіцієнтів згладжувального полінома на поточному кроці локально-ковзного згладжування.*
Ключові слова: *базисна функція двох змінних, первинні та вторинні координати, згладжувальний поліном, траєкторні вимірювання, вектор, початкове наближення.*

© Мильштейн А.В., Паслен В.В., 2012