УДК 519.254

**В.Н. Ткаченко (д-р. техн. наук, проф.), А.Л. Красников (инж.)**
Институт прикладной математики и механики, г. Донецк
отдел теории управляющих систем
E-mail: zzakkatt@gmail.com

# ПРИМЕНЕНИЕ РОБАСТНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОПЕРАТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКИ

*В статье указаны предпосылки создания робастных методов идентификации. Рассмотрена реализация задачи робастного оценивания параметров модели методом наименьших квадратов. Предложен рекуррентный вариант робастного метода наименьших квадратов. Применение предложенного метода продемонстрировано на примере оценки параметров регрессионного полинома зависимости мощности энергоблока СКД от расхода питательной воды.*

***Ключевые слова:*** *идентификация, метод наименьших квадратов, робастность, М-оценки.*

## Общая постановка проблемы

Регрессионные методы являются одним из наиболее популярных инструментов идентификации моделей технологических процессов, которые позволяют получить оценки параметров моделей, обладающие свойствами состоятельности, несмещенности и эффективности. Указанные свойства имеют оценки, полученные методом наименьших квадратов, в том числе и при наличии ошибок измерений, закон распределения которых достаточно близок к нормальному. Однако нередко статистические данные содержат резко выделяющиеся наблюдения и ошибки не подчиненные нормальному закону распределения, значительно влияющие на конечный результат. Применение методов предварительной фильтрации данных не всегда может дать желаемый результат, так как в случаях многопараметрической и квазилинейной регрессии построение эффективной процедуры фильтрации представляет собой отдельную задачу обработки измерений.

Для решения указанной проблемы длительное время разрабатываются робастные статистические методы, которые помимо задачи оценивания параметров моделей так же оценивают некоторые статистические свойства ошибок оценивания [1,2]. В данной статье рассматривается робастный метод наименьших квадратов и предлагается его рекуррентный вариант. Предложенные методы реализованы для оценивания параметров регрессионной зависимости мощности энергоблока СКД 300 МВт от расхода питательной воды в нормативных режимах.

## Постановка задач исследования

Для решения задачи рекуррентного робастного оценивания коэффициентов модели необходимо решить следующие задачи:

1) сформулировать основные свойства робастного метода наименьших квадратов;
2) сформировать алгоритм робастного рекуррентного метода наименьших квадратов;
3) реализовать метод для исследования зависимости мощности энергоблока от расхода питательной воды и показать отличия данного алгоритма от классического РМНК.

## М-оценки параметров модели

Метод наименьших квадратов является одним из классических методов оценивания параметров моделей. Задача оценивания параметров модели представленной в виде

$$y = \sum_{1}^{n} \alpha_i x_i = x^T \alpha , \tag{1}$$

по $m$ измерениям ставится как задача минимизации функционала

$$S = \sum_{k=1}^{m} w_k (y_k - x_k^T \hat{\alpha})^2 = (Y - X\hat{\alpha})^T W (Y - X\hat{\alpha}) = tr[W(Y - X\hat{\alpha})(Y - X\hat{\alpha})^T], \quad (2)$$

где $W$ — диагональная матрица весовых коэффициентов (для упрощения берутся единичные весовые коэффициенты: $W = E$ ).

Для нахождения оценки параметров модели выписывается производная (2) по параметрам модели:

$$\frac{\partial [W(Y - X\hat{\alpha})^T (Y - X\hat{\alpha})]}{\partial \hat{a}} = \frac{\partial tr[WYY^T + WX\hat{\alpha}\hat{\alpha}^T X^T - WX\hat{\alpha}Y^T - WY\hat{\alpha}^T X^T]}{\partial \hat{a}} = \quad (3)$$
$$= 0 + 2X^T WX\hat{\alpha} - X^T W^T Y - X^T WY = 2(X^T W^T X\hat{\alpha} - X^T W^T Y) = 0,$$

Решая полученное равенство можно найти оценку параметров в виде:

$$\hat{\alpha} = (X^T WX)^{-1} X^T WY, \quad (4)$$

Доказано, что полученная оценка является состоятельной, несмещенной и эффективной в случае нормального закона распределения ошибок измерения [3]. Более того, в случае, если система содержит ошибку $y = x^T \alpha + \nu$ с нормальным законом распределения (математическое ожидание равно 0, дисперсия $\sigma$ ), то величина остатков $r_i = y_i + x_i^T \alpha$ тоже подчинена нормальному закону распределения и $S = \sum_{k=1}^{r} (x_k{}^T \alpha + n_k - x_k^T \hat{\alpha})^2 = \sum_{k=1}^{r} (n_k)^2 = \sum_{k=1}^{r} (0 - n_k)^2 = Dn_k = \sigma$.

Следует отметить, что ошибки системы в общем случае не всегда имеют нормальный закон распределения, могут содержать значительные выбросы. Стандартные методы не рассматривают влияние резко выделяющихся наблюдений на результат оценивания, хотя при ограниченном наборе измерений одно выделяющееся наблюдение может значительно исказить статистические параметры выборки. Предусматривается, что данные наблюдений проходят предварительную фильтрацию и отстоящие наблюдения выбрасываются либо заменяются интерполированными значениями. Однако при наличии сложных зависимостей не всегда удается сформулировать критерии, по которым следует выделять ошибочные наблюдения, так как резко выделяющиеся наблюдения могут отражать определенные особенности системы. В таком случае обычно рекомендуется выполнить повторные наблюдения при аналогичных условиях, но такая возможность существует не всегда.

В связи с этим возникает надобность в построении робастных методов оценивания. Робастные методы должны выполнять точное оценивание для заданного массива данных, анализировать резко выделяющиеся значения и, при надобности, снижать влияние возможно ошибочных данных.

Для построения теории робастного оценивания Хьюбер в 60-х годах прошлого века ввел понятие М-оценок [1]. М-оценкой (оценкой максимального правдоподобия) называется оценка, полученная в результате минимизации функционала

$$S = \sum_{k=1}^{m} \rho(x_k, y_k, \alpha) \to \min, \quad (5)$$

или решения уравнения для $\psi = \frac{\partial}{\partial \alpha} \rho$:

$$\sum_{k=1}^{m} \psi(x_k, y_k, \alpha) = 0, \quad (6)$$

Несложно заметить, что оценка по методу наименьших квадратов является частным случаем М-оценок с функцией $\rho(y_k - x_k^T \alpha) = (y_k - x_k^T \alpha)^T (y_k - x_k^T \alpha)$.

Дальнейшее построение робастных процедур тесно связано с анализом влияния ошибок измерений на результат оценивания. Так в случае МНК можно получить подогнанные значения выхода.

$$\hat{Y} = X(X^T X)^{-1} X^T Y, \quad (7)$$

Соответствующая матрица

$$H = X(X^T X)^{-1} X^T, \quad (8)$$

называется матрицей подгонки, через которую можно определить величины невязки для каждой точки.

$$r_i = y_i - \hat{y}_i = (1 - h_{ii}) y_i - \sum_{k \neq i} h_{ik} y_k, \quad (9)$$

В данном случае точки с большими значениями в соответствующем столбце матрицы подгонки будут давать результирующую большую ошибку в остатках. Такие точки называются точками разбалансировки и зачастую именно они представляют собой случайные выбросы.

Отдельно в задачах робастного оценивания вводятся оценки сдвига и масштаба ошибок [1,2,]. Для этого вводится оценка среднего значения и дисперсии ошибки, которая рассчитывается через величину медианы ошибок и среднего медианного отклонения (MAD).

$$\theta_i = med\{x_i\},$$
$$\sigma_i = \frac{MAD\{x_i\}}{0.6745} = \frac{med\{|x_i - med\{x_i\}|\}}{0.6745}. \quad (10)$$

Использование оценки сдвига и масштаба позволит сделать алгоритм инвариантным относительно масштаба ошибок и определить резко выделяющиеся точки.

Робастный МНК формулируется как задача (5)–(6) с функциями $\rho = w\left(\frac{r_i^* - \theta_i}{\sigma_i}\right)(y_k - x_k^T \alpha)^T (y_k - x_k^T \alpha)$ и $\psi = w\left(\frac{r_i^* - \theta_i}{\sigma_i}\right) x_k^T (x_k \alpha - y_k)$, где $\theta_i, \sigma_i$ — текущие оценки сдвига и масштаба и $w\left(\frac{r_i^* - \theta_i}{\sigma_i}\right)$ весовые коэффициенты резко выделяющихся точек. Робастный метод наименьших квадратов предусматривает введение весовых функций $w$, зависящих от величины остатков, их сдвига и масштаба, которые рассчитываются для масштабированных остатков и позволяют снизить влияние резко выделяющихся наблюдений.

Такой метод подобен взвешенному методу наименьших квадратов и полученные оценки сохраняют свойства метода наименьших квадратов [4].

Решение задачи робастного оценивания выполняется итеративно:

Шаг 1. Просчитать весовые коэффициенты для точек разбалансировки $\frac{K}{\sqrt{1 - h_i}}$, для выбранного $K$.

Шаг 2. Построить решение обычным методом наименьших квадратов (3).

Шаг 3. Найти величины остатков $r_i = y_i - x_i^T \hat{\alpha}$.

Шаг 4. Оценить величину сдвига и масштаба (10).

Шаг 5. Рассчитать весовые коэффициенты для всех точек $w_i$.

Шаг 6. Построить новое решение взвешенным методом наименьших квадратов.

$$\hat{\alpha} = (X^T W X)^{-1} X^T W Y, \quad (11)$$

где $W$ — диагональная матрица весовых коэффициентов $w_i$.

Шаг 7. Сравнить новое решение с решением на предыдущем шаге. Если решения не различаются, то выполняется остановка алгоритма, иначе — возврат на шаг 3.

Данный алгоритм реализован в среде MATLAB в функции robustfit [5]. В качестве весовых функций предложены 8 функций:

- Эндрюса — $w(r_i) = \begin{cases} \sin(r_i)/r_i, |r_i| \le \pi \\ 0, |r_i| > \pi \end{cases}$;

- Биквадратичная — $w(r_i)=\begin{cases}\left(1-r_i^2\right)^2, |r_i|\le 1\\ 0, |r_i|>1\end{cases}$;
- Коши — $w(r_i)=1/(1+r_i^2)$;
- Хьюбера — $w(r_i)=1/\max(1,|r_i|)$;
- Логистическая — $w(r_i)=\tanh(r_i)/r_i$;
- Вельша — $w(r_i)=e^{-r_i^2}$;
- Тальвара — $w(r_i)=\begin{cases}1, |r_i|\le 1\\ 0, |r_i|>1\end{cases}$.

В общем случае весовые функции имеют следующие свойства:

$$\begin{aligned}&w(0)=1,\\&w(-x)=w(x),,\\&w(x)\big|_{x\to\infty}=0\end{aligned} \tag{11}$$

**Оперативное оценивание коэффициентов модели робастными методами**

Обычный МНК можно модифицировать и выписать в рекуррентной форме [3]. Полученный рекуррентный метод наименьших квадратов используется для оперативного оценивания параметров и имеет меньшую вычислительную сложность за счет упрощения операции обращения матрицы в (3).

Аналогичные преобразования можно выполнить с робастным МНК.

Наилучшая оценка, полученная на r-м шаге соответствует соотношению, которое можно записать в следующем виде:

$$\left(\sum_{i=1}^{r} w_i x_i^T x_i\right)\hat{\alpha}_r=\sum_{i=1}^{r} w_i x_i^T y_i\ , \tag{12}$$

Для упрощения записи вводится следующее обозначение:

$$P_r^{-1}=\sum_{i=1}^{r} w_i x_i^T x_i\ , \tag{13}$$

Тогда выражение (12) можно записать в виде:

$$P_r^{-1}\hat{\alpha}_r=\sum_{i=1}^{r} w_i x_i^T y_i\ , \tag{14}$$

или

$$\hat{\alpha}_r=P_r\sum_{i=1}^{r} w_i x_i^T y_i\ , \tag{15}$$

Определим рекуррентную форму записи для вычисления значения $\hat{\alpha}_r$. Перепишем (14):

$$\begin{aligned}P_r^{-1}\hat{\alpha}_r&=\sum_{i=1}^{r-1} w_i x_i^T y_i+w_r x_r^T y_r=\left(\sum_{i=1}^{r-1} w_i x_i^T x_i\right)\hat{\alpha}_{r-1}+w_r x_r^T y_r=\\&=\left(\sum_{i=1}^{r-1} w_i x_i^T x_i\right)\hat{\alpha}_{r-1}+w_r x_r^T x_r\hat{\alpha}_{r-1}-w_r x_r^T x_r\hat{\alpha}_{r-1}+w_r x_r^T y_r\quad ,\\&=\left(\sum_{i=1}^{r} w_i x_i^T x_i\right)\hat{\alpha}_{r-1}+w_r x_r^T\left(y_r-x_r\hat{\alpha}_{r-1}\right)\end{aligned} \tag{16}$$

Учитывая (13):

$$P_r^{-1}\hat{\alpha}_r=P_r^{-1}\hat{\alpha}_{r-1}+w_r x_r^T\left(y_r-x_r\hat{\alpha}_{r-1}\right),$$

или:

$$\hat{\alpha}_r=\hat{\alpha}_{r-1}+P_r w_r x_r^T\left(y_r-x_r\hat{\alpha}_{r-1}\right), \tag{17}$$

где:

$$P_r^{-1} = P_{r-1}^{-1} + w_r x_r^T x_r\,, \tag{18}$$

Следует отметить, что при оперативном оценивании параметров, исходные точки не доступны изначально, а переоценка весовых коэффициентов для точек разбалансировки повысит вычислительные и временные затраты. Поэтому функция весовых коэффициентов будет рассчитываться без учета коэффициентов точек разбалансировки $w\left(\dfrac{r_i - \theta_i}{\sigma_i}\right)$.

Итоговый алгоритм робастного РМНК формулируется следующим образом:

Шаг 1. Выбрать начальные значения РМНК.

$$\hat{\alpha}_0 = 0, P_0 = {}^{1}\!/_{\varepsilon} E, \varepsilon \to 0\,, \tag{18}$$

Шаг 2. Выполнить $k \geq n$ итераций обычного РМНК с весовыми коэффициентами $w_i = 1$.

Шаг 3. Найти величины остатков $r_i = y_i - x_i^T \hat{\alpha}$.

Шаг 4. Оценить величину сдвига и масштаба (10).

Шаг 5. Рассчитать весовые коэффициенты для всех точек $w_i$.

Шаг 6. Построить новое решение $\hat{\alpha}_r$ по (17) и (18).

Шаг 7. Вернуться к шагу 3.

**Оперативное оценивание коэффициентов робастным РМНК**

Задача регулирования мощности энергоблока СКД решается регулированием расхода питательной воды. Для решения задачи управления необходимо сформировать модель, описывающую связь между расходом питательной воды и мощностью. Для иллюстрации выбраны данные наблюдений расхода питательной воды и мощности энергоблока СКД 300 МВт. Для выбранных параметров прослеживается полиномиальная зависимость мощности от расхода.

Продемонстрируем метод с использованием робастного РМНК с биквадратичной весовой функцией. Результирующая кривая представлена на рис. 1.

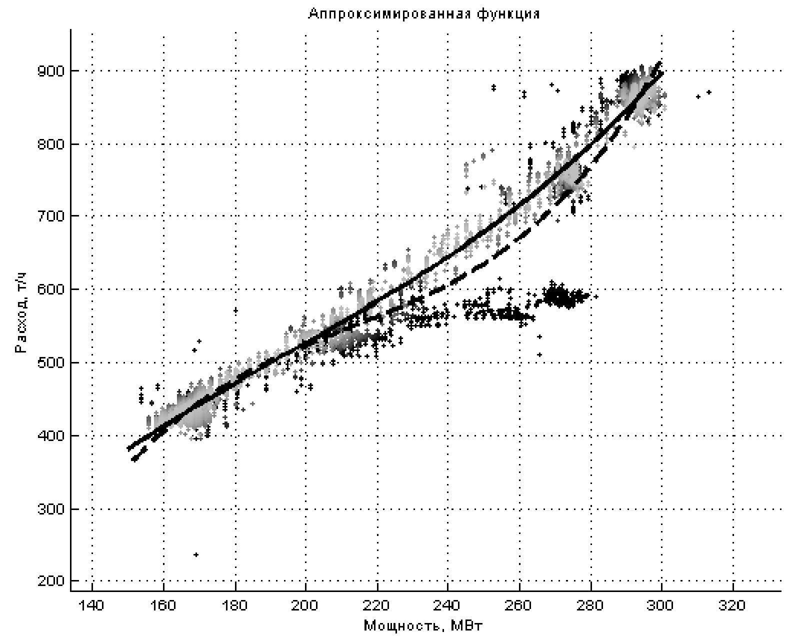


Рисунок 1— Аппроксимированная функция (сплошная линия — робастный РМНК, пунктирная линия — обычный МНК)

На рис. 1 так же разделены точки с низкими весовыми коэффициентами (более темный цвет) и весовыми коэффициентами близкими к единице (светло-серый цвет), для которых строятся веса по формуле бивквадратичной весовой функции. Распределение весовых коэффициентов для рекуррентного метода (рис. 2) соответствует распределению обычного робастного МНК (11), возможные отклонения связаны только с сериями выбросов. Такие серии выбросов появляются при максимальной мощности, когда дальнейшее повышение расхода практически не приводит к росту мощности.

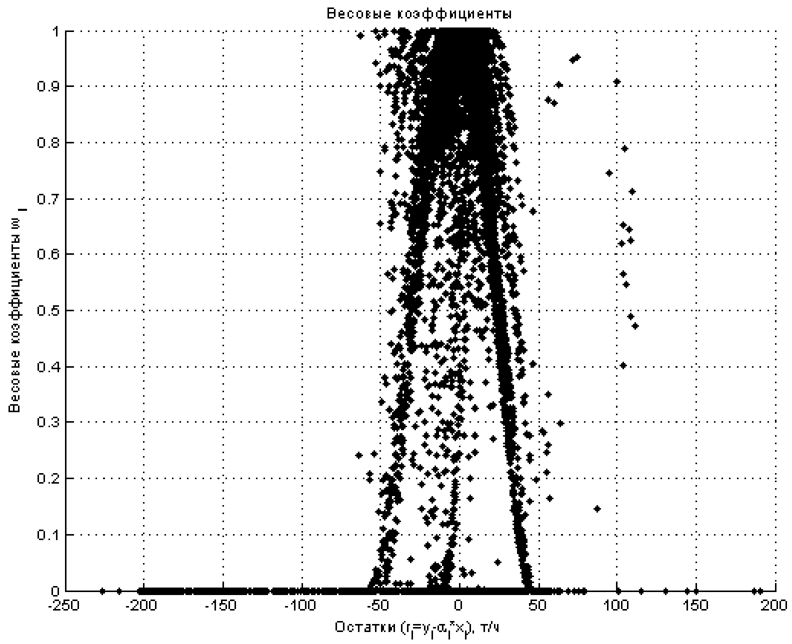


Рисунок 2 — Распределение весовых коэффициентов остатков робастного РМНК

Анализируя преимущества робастного РМНК, так же следует отметить вместе с повышением точности и снижение колебаний коэффициентов модели (рис. 3), что связано с уменьшением влияния единичных выбросов на результат идентификации.

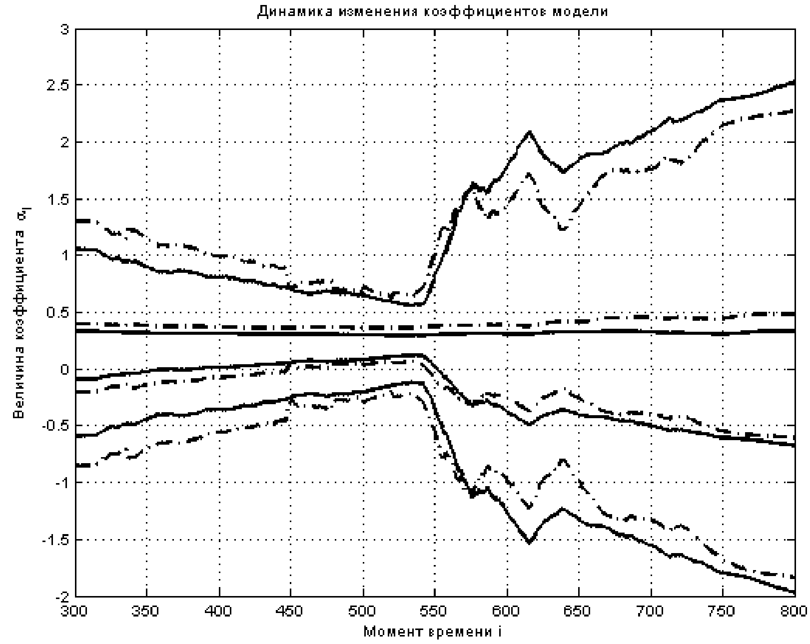


Рисунок 3 — Динамика изменения коэффициентов модели (сплошная линия — робастная оценка, пунктирная линия — обычная оценка)

На приведенном графике отражена динамика коэффициентов регрессионного полинома третьей степени. Так, серия измерений изначально включала набор данных при максимальной мощности (где изменения расхода незначительно влияют на изменение мощности), далее происходит изменение режима функционирования и соответствующее изменение коэффициентов регрессии. При этом, существующие ошибки наблюдений для неробастного РМНК вызывают большие колебания значений коэффициентов, чем для робастного варианта алгоритма, что заметно для моментов времени 570–640 и 670–750.

**Выводы**

1. Рассмотрены робастные статистические методы и их применение для оценивания параметров модели.
2. Предложен алгоритм оперативного робастного оценивания параметров.
3. Применение робастного РМНК продемонстрировано на примере построения зависимости мощности энергоблока СКД 300 МВт от расхода питательной воды. Показано, что робастный метод применим для оперативного оценивания динамики изменения параметров и снижает влияние случайных ошибок измерений за счет введения весов для сильно отстоящих наблюдений.

**Список использованной литературы**


1. Хьюбер П. Дж. Робастность в статистике / П. Дж. Хьюбер. — М.: Мир, 1984. — 304 с.
2. Хампель Ф. Робастность в статистике / Ф. Хампель, Э. Рончетти, П. Рауссеу, В. Штаэль — М.: Мир, 1989. — 512 с.
3. Гроп Д. Методы идентификации систем / Д. Гроп. — М.: Мир, 1979. — 302 с.
4. Huber P.J. Robust Statistics. Second Edition. / P.J. Huber, E. Ronchetti. — Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2009. — 354 p.
5. Robust regression — MATLAB [Электронный ресурс]. — Режим доступа: URL http://www.mathworks.com/help/toolbox/stats/ robustfit.html.


Надійшла до редакції:
01.02.2012 р.

Рецензент:
д-р техн. наук, проф. Скобцов Ю.О.

***V.N. Tkachenko, A.L. Krasnikov. Application of robust statistical methods for rapid identification of parameters of power system models'.*** *This paper presents a background of robust methods of identification. Realization of robust estimation of model parameters by least squares was reviewed. We propose a recursive version of the robust least squares method. Application of the proposed method is demonstrated on the example of estimation of the polynomial regression of power-generating access control feedwater flow.*
***Keywords:*** *identification, the method of least squares, robustness, M-estimation.*

***В.М. Ткаченко, О.Л. Красніков. Застосування робастних статистичних методів для оперативної ідентифікації параметрів моделей теплоенергетики.*** *У статті зазначені передумови створення робастних методів ідентифікації. Розглянуто реалізацію задачі робастного оцінювання параметрів моделі методом найменших квадратів. Запропоновано рекурентний варіант робастного методу найменших квадратів. Застосування запропонованого методу продемонстровано на прикладі оцінки параметрів регресійного полінома залежності потужності енергоблоку НКТ від витрати живильної води.*
***Ключові слова:*** *ідентифікація, метод найменших квадратів, робастність, М-оцінки.*